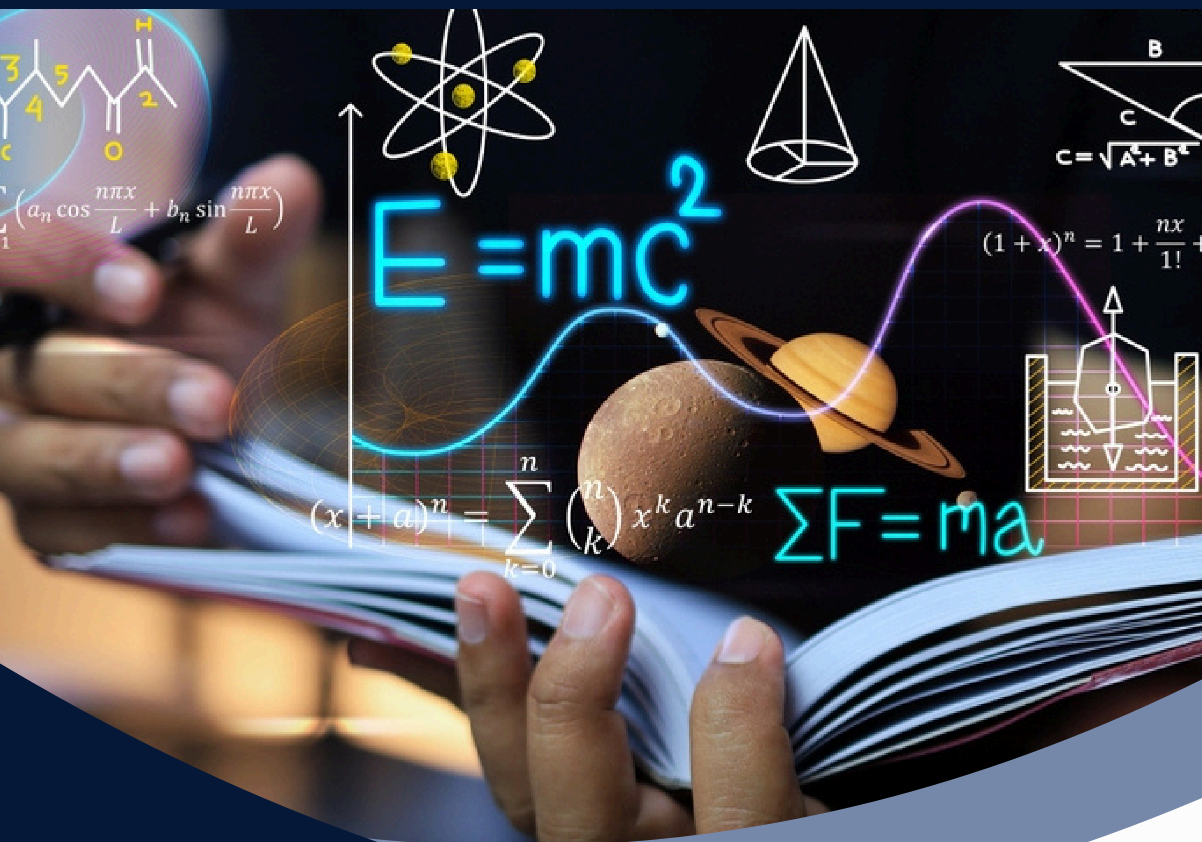
DOĞA BİLİMLERİ VE MATEMATİKTE YENİ VİZYONLAR:

KAVRAMLAR - KURAMLAR - UYGULAMALAR



Editör: Prof. Dr. N. Gülşah DENİZ

DOĞA BİLİMLERİ VE

MATEMATİKTE YENİ VİZYONLAR:

KAVRAMLAR - KURAMLAR - UYGULAMALAR

Editör

Prof. Dr. N. Gülşah DENİZ

Doğa Bilimleri Ve Matematikte Yeni Vizyonlar:
Kavramlar - Kuramlar - Uygulamalar
Editör: Prof. Dr. N. Gülşah DENİZ

Genel Yayın Yönetmeni: Berkan Balpetek
Kapak ve Sayfa Tasarımı: Duvar Design
Yayın Tarihi: EKİM 2024
Yayıncı Sertifika No: 49837
ISBN: 978-625-6183-17-9

853 Sokak No:13 P.10 Kemeraltı-Konak/İzmir
Tel: 0 232 484 88 68

www.duvaryayinlari.com
duvarkitabevi@gmail.com

İÇİNDEKİLER

1.Bölüm

İdeal Kavramıyla İlgili Bir Not: Boole Halkası Yardımıyla Tanımlanan İdeal ile Toplanabilme Teorisindeki İdeal Tanımlarının Denkliği

Şükran KONCA[1]
Ergin GENÇ[2]

[1] Prof. Dr.: İzmir Bakırçay Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Temel Bilimler Bölümü sukran.konca@bakircay.edu.tr ORCID No: 0000-0003-4019-958X
[2] Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı ergingenc4444@gmail.com

ÖZET

Klasik anlamdaki yakınsaklığa alternatif olarak günümüze kadar çok sayıda yakınsaklık tipi tanımlanmış ve bu kavramlar matematiğin çeşitli disiplinlerine uygulanmıştır. Bu yakınsaklık tiplerinden en çok rağbet göreni kuşkusuz istatistiksel yakınsaklıktır ve pozitif tam sayı kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. İlk olarak 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast (Fast, 1951) ve Steinhaus (Steinhaus, 1951) tarafından tanımlanmıştır. Bu kavram, tanıtıldıktan hemen sonra matematikte aktif çalışma alanlarından biri olmuştur ve özellikle Schoenberg (Schoenberg, 1959), Salat (Salat, 1980), Freedman ve Sember (Freedman, Sember, 1981), Fridy (Fridy, 1985), Connor (Connor, 1988), Fridy ve Orhan (Fridy, Orhan, 1993) gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine önemli katkıda bulunmuştur. Di Maio ve Kočinac (Di Maio, Kočinac, 2008) topolojik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladılar.

İstatistiksel yakınsaklık özetle istatistiksel limit noktasının komşulukları dışında kalan dizinin terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olması koşuluna dayanmaktadır. Bu koşul analizdeki bildiğimiz yakınsaklığa göre daha zayıf bir koşuldur. Klasik anlamda yakınsak olan bir dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Klasik anlamdaki yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı içinde bulunduran ve doğal sayılar üzerindeki idealleri kullanarak ideal yakınsaklık ($I-$yakınsaklık) kavramı, Kostyrko (Kostyrko vd., 2000) tarafından tanımlanmıştır. Kostyrko vd. (Kostyrko vd., 2001) ideal yakınsaklığa bağlı olarak $I-$limit noktası ve $I-$yığılma noktası kavramlarını tanımladılar. Bu kavramlar üzerinde diğer önemli çalışmalar Činčura vd. (Činčura vd., 2004) ve Kostyrko vd. (Kostyrko vd., 2000) tarafından verilmiştir.

Bu bölümde toplanabilme teorisindeki ideal tanımı ile cebirdeki Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımının birbirlerine denk olduğu gösterilecektir. Buradaki amaç olası bir anlam karmaşasını veya kavram yanılgısını önleyerek konuyu açıklık getirmektir. Kullanılacak yaklaşım matematiğin temelindeki mantık yaklaşımıyla basit bir ispat yöntemi olacaktır. Bu bölümün önemi; matematiğin alt bilim dallarından analiz ve cebirin ortak bir nokta bulduğu ideal kavramı ile ilgili önemli bir nota dikkatleri çekmektir. Toplanabilme teorisinin ideal yakınsaklık konusuna yeni başlayanlar için ideal kavramıyla ilgili bir durumu izah etmek faydalı olacaktır.

Anahtar Kelimeler : Boole halkası, toplanabilme teorisi, ideal, istatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık

GİRİŞ

Tanım 1 $\circ : G \times G \to G$

$(g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2$

şeklinde tanımlanan fonksiyona H de bir ikili işlem denir.

Tanım 2 (Çallıalp, 2001) $G \neq \emptyset$ ve "$\circ$", G de bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G, \circ)$ cebirsel yapısına grup denir.

i. $\circ$, G de bir ikili işlemdir.

ii. $\circ$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani, her $a, b, c \in G$ için, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dir.

iii. $\circ$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani, her $a \in G$ için, $a \circ e = e \circ a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

iv. $\circ$ işlemine göre G deki her elemanın tersi vardır. Yani, her $a \in G$ için, $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ bulunabilir.

Tanım 3 $(G, \circ)$ bir grup ve her $a, b \in G$ için $a \circ b = b \circ a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abelyen grup denir.

Tanım 4 $H \neq \emptyset$ üzerinde tanımlı iki ikili işlem "+" ve "." olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan (H,+, .) cebirsel yapısına halka denir.

i. (H,+) bir değişmeli gruptur.

ii. "." işleminin H de birleşme özelliği vardır.

iii. "." işleminin "+" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır.

Tanım 5 H bir halka ve $\emptyset \neq R \subset H$ olsun. H deki işlemlere göre R alt kümesi kendi başına bir halka ise R ye H halkasının bir alt halkası denir.

Tanım 6 H bir halka ve I da H nin bir alt halkası olmak üzere, $a \in I$ ve $x \in H$ için $ax \in I$ ve $xa \in I$ ise I ' ya, H' nin bir ideali denir (Çallıalp, 2001).

Şimdi özel bir halka olan Boole halkasını vereceğiz ve Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımını vereceğiz.

Tanım 7 (Givant, Halmos, 2009) R bir halka ve a da R nin bir elemanı olsun. Eğer $a^2 = a$ ise R bir Boole halkası olarak adlandırılır.

1. İstatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık pozitif tam sayılar kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu durumlarla ilgilendiği için öncelikle doğal yoğunluk kavramı verilecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesinin kardinal sayısı $|A|$ ile gösterilsin yani, $|A| := \operatorname{card} A$ olsun.

Tanım 1.1 $A \subset \mathbb{N}$ olsun. $A_n = \{k \le n : k \in A\}$ olsun. Eğer $\delta(A) = \lim_n \frac{|A_n|}{n}$ limiti mevcut ise $\delta(A)$ sayısına A kümesinin yoğunluğu denir. Doğal yoğunluk diğer bir deyişle, bir A_n dizisi var ve bu A_n dizisinin n den büyük olmayacak şekilde seçilen A_n dizisinin $n \to \infty$ için $\frac{A_n}{n}$ limitinin var olması halinde A dizisi yoğunluğa (doğal yoğunluğa) sahiptir denir. A kümesinin üst yoğunluğu $\overline{\delta}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$ ve benzer şekilde $\underline{\delta}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$ olarak gösterilir (Freedman, Sember, 1981).

Önerme 1.2 $\underline{\delta}(A)$ bir alt yoğunluk ve $\overline{\delta}(A)$ bir üst yoğunluk olmak üzere $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $B \subseteq \mathbb{N}$ için

i. $A \subseteq B$ ise $\underline{\delta}(A) \le \underline{\delta}(B)$

ii. $A \subseteq B$ ise $\overline{\delta}(A) \le \overline{\delta}(B)$

iii. Her A, B için $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \ge \overline{\delta}(A \cup B)$

iv. $\underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$

v. $\overline{\delta}(\mathbb{N}) = \underline{\delta}(\mathbb{N}) = \delta(\mathbb{N}) = 1$

vi. $A \sim B$ ise $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$

vii. $\underline{\delta}(A) \le \overline{\delta}(A)$

özellikleri sağlanır (Freedman, Sember, 1981).

Bu kısımda bazı örneklerle doğal yoğunlukların nasıl bulunacağı gösterilmiştir.

Örnek 1.3 $A = \{1,2,3,...\} = \mathbb{N}$ kümesi için baktığımızda $\delta(A) = 1$ dir. Burada $A(1) = 1,\ A(2) = 2,\ A(3) = 3, ...,\ A(n) = n$ olup $\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ dir.

Örnek 1.4 $A = \{2,4,6,...\}$ kümesinin iki farklı yoldan doğal yoğunluğunun 1/2 olduğunu görmek münkündür.

1.yol: $A(1) = 0, A(2) = 1, A(3) = 1, A(4) = 2, ..., A(n) = \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$ olduğundan

$$\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

2.yol: $\frac{A(n)}{n} = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, ..., \frac{n}{2n}, \frac{n}{2n+1}, ...$ olup

$$\underline{\delta}(A) = \liminf_{n} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ ve } \overline{\delta}(A) = \limsup_{n} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = d_0(A) = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Tanım 1.5 $x = (x_k)$ reel ya da kompleks değerli bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \le n : |x_k - x_0| \ge \varepsilon \} \right| = 0$$

olacak şekilde bir x_0 sayısı mevcut ise bu x dizisi x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $st - \lim x = x_0$ ile gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Tanımdan da anlaşılacağı gibi istatistiksel yakınsaklık doğal yoğunluğun sıfır olduğu kümelerle ilgilenir.

İstatistiksel yakınsaklık ile Cesaro matrisi kavramlarını karşılaştıralım.

$C_1 = (c_{nk})$ Cesaro matrisi olmak üzere bu matris;

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

ile verilir. $K(\varepsilon) = \{k : |x_k - x_0| \ge \varepsilon\}$ ve $\chi_{K(\varepsilon)}$, $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermek üzere

$$st-\lim_k x_k = x_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|x_k - x_0\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \lim_n \left(C_1\chi_{K(\varepsilon)}\right)_n = 0$$

olduğu açıktır (Connor, 1988).

Teorem 1.6 Hiçbir matris toplanabilme metodu, istatistiksel yakınsaklık metodunu içeremez (Fridy, Orhan, 1993).

Teorem 1.7 $p \in \mathbb{N}$ ve $0<p<\infty$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

i. Bir dizi x_0 sayısına kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir ise x_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır.
ii. Sınırlı bir dizi x_0 sayısına istatistiksel yakınsak ise x_0 sayısına kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilirdir (Connor, 1988).

Lemma 1.8 $st-\lim_{k\to\infty} x_k = a$ ve $st-\lim_{k\to\infty} y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu durumda

i. $st-\lim_{k\to\infty}\left(x_k + y_k\right) = a+b$
ii. $st-\lim_{k\to\infty}\left(cx_k\right) = ca$ dir (Salat, 1980).

Bu kısımda verdiğimiz örnekler istatistiksel yakınsaklıkla ilgili literatürde geçen veya kendi verdiğimiz örneklerin detaylı çözümleridir.

Örnek 1.9 Şekildeki gibi tanımlanan,

$$x=(x_n)=\begin{cases} n, & n=k^2 \\ 0, & n\ne k^2 \end{cases} \quad ,(n=1,2,3,...)$$

dizisini inceleyelim. Bulmamız gereken, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|x_k - x_0\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$ olacak şekilde bir x_0 sayısıdır.

$$n = k^2 \Rightarrow x_n = n \Rightarrow |n-0| = |n| = n \geq \varepsilon \Rightarrow k^2 \geq \varepsilon \Rightarrow k \geq \sqrt{\varepsilon}$$

$$n \neq k^2 \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow |n-0| = |0-0| = 0 \geq \varepsilon \Rightarrow Ç.K = \varnothing.$$

Bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$\left|\left\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right| = \left|\left\{k \leq n : n = k^2, |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right| \cup \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{k \leq n : n = k^2, k \geq \sqrt{\varepsilon}\right\}\right| \cup \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, 0 \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Her iki tarafın doğal yoğunluğuna bakılırsa eğer;

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : n = k^2, k \geq \sqrt{\varepsilon}\right\}\right| \cup \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, 0 \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Böylece (x_n) dizisi için $st - \lim x = 0$ olduğu görülür.

Örnek 1.10 Aşağıdaki gibi tanımlanan

$$x = (x_n) = \begin{cases} n \quad , & n = k^2 \\ \dfrac{n-1}{n}, & n \neq k^2 \end{cases} \quad ,(n = 1, 2, 3, ...)$$

dizisi için $st - \lim x = 1$ olduğunu gösterelim.

$$n = k^2 \text{ için } x_n = n \Rightarrow |x_n - 1| = |n-1| = n - 1 \geq \varepsilon \Rightarrow k^2 \geq \varepsilon + 1 \Rightarrow k \geq \sqrt{\varepsilon + 1}$$

$$n \neq k^2 \text{ için } x_n = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq \varepsilon \Rightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow k \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

$\varepsilon > 0$ ve $k \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$ olduğundan $\left\{k \leq n : n \neq k^2, k \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ kümesi sonlu bir kümedir. Buna göre

$$\left|\left\{k \leq n : |x_n - 1| \geq \varepsilon\right\}\right| = \left|\left\{k \leq n : n = k^2, |x_n - 1| \geq \varepsilon\right\}\right| \cup \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, |x_n - 1| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{k \leq n : n = k^2, k > \sqrt{\varepsilon + 1}\right\}\right| \cup \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, k \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right|.$$

Yukarıdaki denklemde her iki tarafın doğal yoğunluğuna bakılacak olursa $\left\{k \leq n : n \neq k^2, k \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$ kümesi sınırlı olduğundan doğal yoğunluğu sıfırdır. Buna göre

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : |x_n - 1| \geq \varepsilon\right\}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : n = k^2, k \geq \sqrt{\varepsilon + 1}\right\}\right| \cup \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : n \neq k^2, k \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} + 0 = 0.
\end{aligned}$$

O halde (x_n) dizisi 1'e istatistiksel yakınsaktır. $x_n \to 1(S)$ veya $st - \lim x = 1$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 1.11 Klasik anlamdaki yakınsak diziler sınırlıdır; fakat istatistiksel yakınsak her dizi sınırlı olmayabilir. Şimdi buna bir örnek verelim;

Örnek 1.12 Aşağıdaki gibi tanımlanan bir

$$x = (x_n) = \begin{cases} n, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \quad ,(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dizisini incelediğimizde $n = k^2$ için (x_n) dizisinin üstten sınırlı olmadığı açıktır. $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sonsuz tane değer alabilir (Demirci, 1998).

Uyarı 1.13 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır fakat tersi doğru değildir. Buna bir ters örnek verecek olursak;

$$x=(x_n)=\begin{cases}1, & n=k^2\\ 0, & n\neq k^2\end{cases} \quad ,(n=1,2,3,...)$$

dizisini incelediğimizde

$$x=(x_n)=(1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,...)=\ (x_1,x_2,x_3,x_4,...).$$

Burada dikkat edilirse $(x_{n^2})=1$ olduğu görülür diğer durumlarda $(x_n)=0$ dır. Burada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\cdots,\frac{2}{n},\cdots\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

olup istatistiksel yakınsaktır. Fakat $\underline{\lim}_n\, x_n=0$ ve $\overline{\lim}_n\ x_n=1$ olup alt ve üst limitler birbirine eşit olmadığından bu dizi yakınsak değildir (Demirci, 1998).

2. İdeal Yakınsaklık

Tanım 2.1 (Kostyrko vd., 2000) $X\neq\varnothing$ olsun. $I\subset 2^X$ ($P(X)=2^X$: X kümesinin kuvvet kümelerinin ailesi) sınıfına, aşağıdaki şartlar sağlandığı takdirde, X de bir ideal denir.

1. $\varnothing\in I$
2. $\forall A,B\in I\Rightarrow A\cup B\in I$
3. $\forall A\in I,\ \forall B\subset A\Rightarrow B\in I$

Eğer $X\notin I$ oluyorsa yani $I\neq 2^X$ ise I idealine öz ideal (non-trivial ideal) adı verilir. Buna göre 2^X dışındaki tüm idealler öz ideallerdir.

Tanım 2.2 I , X de bir öz (non-trivial) ideal olsun. Eğer her $x\in X$ için $\{x\}\in I$ ise, yani I öz ideali X in tüm sonlu alt kümelerini içeriyor ise, I idealine uygun (admissible) ideal denir.

Tanım 2.3 $X \neq \emptyset$ olsun. X in boş kümeden farklı alt kümelerinin $F \subset 2^X$ sınıfına aşağıdaki şartlar;

1. $\emptyset \notin F$
2. $\forall A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$
3. $\forall A \in I, \forall B \supset A \Rightarrow B \in I$

sağlandığı takdirde X de bir filtre (veya süzgeç) adı verilir.

Aşağıdaki önerme idealle ilişkilendirilmiş filtreyi ifade etmektedir.

Önerme 2.4 $X \neq \emptyset$ ve I, X ' de bir öz ideal (non-trivial ideal) olsun. Bu durumda

$$F(I) = \{M \subseteq X : \exists A \in I : M = X - A\}$$

sınıfına X üzerinde bir filtre denir. $F(I)$ sınıfı I ile ilişkilendirilmiş filtre olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 I, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde bir öz ideal (non-trivial ideal) olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n : |x_n - x_0| \geq \varepsilon\} \in I$ oluyorsa $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisine $x_0 \in \mathbb{R}$ ye *I*-yakınsaktır (ideal yakınsaktır) denir.

Eğer $x = (x_n)$ dizisi $x_0 \in \mathbb{R}$ ye *I*-yakınsak ise $I - \lim x_n = x_0$ veya $I - \lim x = x_0$ olarak gösterilir ve $x = (x_n)$ dizisinin *I*-limiti denir [3]. İdeal yakınsaklık kavramının bazı bilinen yakınsaklık aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı sorusu akla gelebilir. Yakınsaklığın en çok bilinen aksiyomları aşağıdaki gibidir:

(S) Her $x = (x_n) = (x_0, x_0, x_0, ..., x_0, ...)$ sabit dizisi $x_0 \in \mathbb{R}$'ye $I-$ yakınsaktır.

(H) Limitin tekliği; eğer $I - \lim x = x_0$ ve $I - \lim x = x_0'$ ise $x_0 = x_0'$ dır.

(F) Eğer $I - \lim x = x_0$ ise x 'in her bir y alt dizisi için $I - \lim y = x_0$ dır.

(U) Eğer x in her bir y alt dizisinin x_0'a $I-$yakınsak bir z alt dizisi varsa *x* de x_0 a *I*-yakınsaktır denir.

Teorem 2.6 I, $\mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun. Buna göre,

i. $I-$yakınsaklık (S), (H) ve (U) aksiyomlarını sağlar.

ii. Eğer $I-$ideali bir sonsuz elemanlı bir küme içeriyorsa, $I-$yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlamaz.

Uyarı 2.7 Eğer bir I uygun ideal (admissible ideal) sonsuz elemanlı küme içermiyorsa, $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin sınıfı ile I çakışır ve $\mathbb{R}$'deki yakınsaklık ile ideal yakınsaklık eşittir. Bundan dolayı $I-$ yakınsaklık (F) aksiyomunu sağlar.

Şimdi $I-$yakınsaklıkla ilgili birkaç örnek verilecektir.

1. $I_0 = \{\varnothing\}$ olsun. Bu $\mathbb{N}$'de boştan farklı minimal non-trivial idealdir. Açık bir şekilde bu dizi I_0-yakınsak olması için gerek ve yeter şart sabit dizi olmasıdır.

2. $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}, M \neq \mathbb{N}$ olsun. $I_M = 2^M$ olarak seçelim. Bu durumda I_M , $\mathbb{N}$ kümesinde bir öz (non-trivial) idealdir. Bir $x = (x_n)_1^\infty$ dizisi I_M-yakınsaktır gerek ve yeter şart $N \setminus M$ üzerinde sabit dizidir (Her bir terimi $\mathbb{N}$ ile denk geldiğinden sabittir. Açıkça I. ve II. örneklerinin açık bir halidir).

3. I_f, $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu alt sınıfı olarak gösterilsin. Bu durumda I_f, $\mathbb{N}$'nin bir uygun (admissible) idealidir ve I_f yakınsaklık $\mathbb{R}$ 'deki klasik yakınsaklık ile çakışır.

4. $I_d = \{A \subseteq \mathbb{N}: d(A) = 0\}$ olarak seçilsin. Buna göre I_d, $\mathbb{N}$'nin bir admissible (uygun) idealidir ve I_d yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

5. $I_\delta = \{A \subseteq \mathbb{N}: \delta(A) = 0\}$ olarak seçilsin. Buna göre I_δ, $\mathbb{N}$'nin bir admissible (uygun) idealidir ve I_d yakınsaklık logaritmik istatistiksel yakınsaklığa indirgenmiş olur. Eğer $I_\delta - \lim x_n = x_0$ ise $I_d - \lim x_n = x_0$ dir (iii. 'e bakınız). Tersi doğru değildir.

4.ve 5. şıklarda, ideal yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki görülebilir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.8 I_2, $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ nin bir ideali olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: |x_{k,l} - x_0| \geq \varepsilon\} \in I_2$$

oluyorsa $(x_{k,l})$ çift indisli dizisi I_2- yakınsaktır denir (Tripathy, 2005).

Tanım 2.9 Bir $x=(x_k)$ dizi olmak üzere her $\varepsilon,\delta>0$ için

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n}\left|\{k \leq n: |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}\right| \geq \delta\right\} \in I$$

ise $x=(x_k)$ dizisi, x_0'a $I-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $x_k \to x_0\left(S(I)\right)$ veya $S(I)-\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ olarak ifade edilmektedir. Tüm $I-$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S(I)$ ile gösterilir (Das vd., 2001).

3. Boole Halkası Yardımıyla Tanımlanan İdeal Tanımı ile Toplanabilme Teorisindeki İdeal Tanımlarının Denkliği

Bu bölümde toplanabilme teorisindeki ideal tanımı ile cebirdeki Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal tanımların denk olduğu gösterilecek.

Daha önce Tanım 7 de bahsedilen Boole halkasında;
"Δ" ifadesi simetrik fark olmak üzere A ve B kümesinin simetrik farkı;

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

dir. Burada "$+$" işlemi yerine simetrik fark (Δ) ve "$.$" işlemi yerine de kesişim alınırsa tanımlanan Boole halkası $\left(P(X),\ \Delta,\ \cap\right)$ şeklinde olur.

Teorem 2.1 Boole halkası yardımıyla tanımlanan ideal $\left(P(X),\ \Delta,\ \cap\right)$, Kostyrko (Kostyrko vd., 2000) nun tanımladığı toplanabilme teorisindeki ideale denktir.

Toplanabilmedeki ideal tanımı:	Boole Halkası ile tanımlanan ideal tanımı:
i. $i.\varnothing\in I$	1. $1.\varnothing\in I$
ii. $ii.\forall A,B\in I\Rightarrow A\cup B\in I$	2. $2.\forall A,B\in I\Rightarrow A\Delta B\in I$
iii. $iii.\forall A\in I,\ \forall B\subset A\Rightarrow B\in I$	3. $3.\forall B\in P(X)$ ve $\forall A\in I$ için $A\cap B\in I$

İspat: Soldaki ve sağdaki ifadelerin birbirlerine denk olduğunu gösterelim.
$(:\Rightarrow)$ i. şartından dolayı 1. şartının sağlandığı açıktır.

Şimdi 2. nin sağlandığını gösterelim. Yine aynı şekilde i. ii. ve iii. sağlansın. $\forall A, B \in I \Rightarrow A \Delta B \in I$ mıdır?

ii. den $\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$ idi. A ve B nin simetrik farkı $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olup

$$\left.\begin{array}{l} A \setminus B \subset A \in I \\ B \setminus A \subset B \in I \end{array}\right\} \Rightarrow (A \setminus B) \in I,\ (B \setminus A) \in I$$

dır.

ii. den $\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$ idi. Aynı şekilde

$$(A \setminus B) \in I \text{ ve } (B \setminus A) \in I \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B \in I \,.$$

Son olarak 3. ün sağlandığını gösterelim. i. ii. ve iii. sağlansın. Bu durumda $\forall\, B \in P(X)$ ve $\forall\, A \in I$ için $A \cap B \in I$ mıdır?

iii. den

$$B \subset A \Rightarrow B \cap A \subset A$$

dir. $B \cap A \subset A$ ve ii) den $\forall A \in I$ olduğundan $B \cap A \in I$ elde edilir. $I \subseteq P(X)$ olduğundan,

$$\forall B \in P(X) \text{ ve } \forall A \in I \text{ için } A \cap B \in I$$

dir. Böylece 3. ü göstermiş olduk. Şimdi de yeter şartın sağlandığını gösterelim:

$(:\Leftarrow)$ Şimdi 1. 2. 3. şartlarının sağlandığını kabul edelim i. ii. iii. şartlarının sağlandığını gösterelim.

i. nin sağlandığı açıktır.

ii. $\forall A, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$ mıdır?

2. den $\forall A, B \in I \Rightarrow A \Delta B \in I$ olduğunu biliyoruz. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in I$ ve 3. den $A \cap B \in I$. Burada simetrik farktaki eşitliğin sağ tarafını $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = X$ ve $(A \cap B) = Y$ ile gösterelim. 2. ye benzer olarak $X, Y \in I \Rightarrow X \Delta Y \in I$ dir.

$$
\begin{aligned}
X \Delta Y \in I &\Leftrightarrow \{((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \Delta (A \cap B)\} \in I \\
&\Leftrightarrow \{[((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus (A \cap B)] \cup [(A \cap B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))]\} \in I \\
&\Leftrightarrow \{((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus (A \cup B))\} \in I \\
&\Leftrightarrow \{(A \cup B) \Delta (A \cap B)\} \in I
\end{aligned}
$$

olup $(A \cup B) \in I$ ve $(A \cap B) \in I$ dir. Bizim göstermemiz gereken de $(A \cup B) \in I$ idi. Dolayısıyla $\forall A, B \in I$ için $(A \cup B) \in I$ dir. Son olarak iii. sağlandığını göstermemiz yeterli olacaktır.

iii. $\forall A \in I, \forall B \subset A \Rightarrow B \in I$ mıdır?

3. den $\forall B \in P(X)$ ve $\forall A \in I$ için $A \cap B \in I$ olduğunu biliyoruz. Göstermemiz gereken $\forall A \in I$ ve $\forall B \subset A$ için $B \in I$ olmasıdır.

$B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca 3. den $A \cap B \in I$ olduğundan $B \in I$ elde edilir (Konca, 2017; Genç, 2018).

REFERANSLAR

Činčura, J., Šalát, T., Sleziak, M., Toma, V. (2004). Sets of Statistical Cluster Points and $\mathcal{J}$-Cluster Points. *Real Analysis Exchange*, 30 (2): 565-580.

Connor, J.S. (1988). The statistical and strong *p*-Cesaro convergence of sequences. *Analysis, 8*, 47–63.

Çallıalp, F., (2001). *Örneklerle Soyut Cebir*. Birsen Yayınevi. İstanbul.

Das, P., Savaş, E., Ghosal, S.K. 2011. On Generalizations of Certain Summability Methods Using Ideals. *Applied Mathematics Letters*, 24 (9), 1509-1514.

Demirci, K. (1998). *İstatistiksel Yakınsaklık*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Demirci, K. (1998). *A-İstatistiksel Yakınsaklık ve Çarpan Uzayları*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Di Maio G., Kočinac, L.D.R. (2008). Statistical Convergence in Topology. *Topology and its Applications, 156 (1)*, 28-45.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum, 2,* 241-244.

Freedman, A.R., Sember, J.J. (1981). Densities and summability. *Pasific Journal of Mathematics, 95*, 293-305.

Fridy, J.A. (1985). On some statistical convergence, *Analysis, 5*, 301-313.

Fridy, J.A., Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific Journal of Mathematics, 160 (1).*

Genç, E. (2018). Yerel katı Riesz uzaylarında bazı ideal yakınsaklık çeşitleri, Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi.

Givant, S., Halmos, P. (2009). 14-20, in: *Introduction to Boolean Algebras.* Springer, Press, USA.

Konca, Ş. (2017). İstatistiksel ve ideal yakınsaklık ders notları.

Kostyrko, P., Salat, T., ve Wielczynski, W. (2000). I-convergence. *Real Analysis Exchange*, *26*, 669-686.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T., Strauch, O. (2011). On Statistical Limit Points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129 (9): 2647-2654.

Kostyrko, P., Macaj, M., Šalát, T. (2000). Statistical Convergence and I-Convergence. The International Mathematical Scientific Conference, *16th Summer School on Real Functions Theory.*

Salat, T. (1980). On statistical convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca, 30*, 139-150.

Schoenberg, I.J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Society, Monthly, 66*, 361-375.

Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum, 2*, 73-74.

Tripathy, B., Tripathy, B.C. (2005). On I-convergent double sequences. *Soochow Journal of Mathematics, 31 (4)*, 549.

2. Bölüm

Sayısal Hesaplamalarda Kararlılık Analizi

Ahmet BOZ[1]

[1] Prof. Dr., Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, ahmet.boz@dpu.edu.tr, ORCID: 0000-0002-1438-2391.

GİRİŞ

Bu çalışmada, sayısal yöntemlerin kararlılığını incelemek için kullanılan Von Neumann kararlılık analizi anlatılacaktır. Sayısal çözümler sırasında oluşan hataların zamanla büyüyüp büyümeyeceğini belirlemek için kullanılan bu analiz, özellikle kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde vazgeçilmez bir unsurdur. Von Neumann analizi, çözümün kararlılığını incelemek için denklemlerin Fourier metodu ile analiz edilmesine dayanır. Bu yöntemle, zaman adımı ağ aralığı gibi çözüm parametrelerinin, çözümün kararlı kalıp kalmayacağı üzerindeki etkisi incelenir.

Sayısal çözüm yöntemlerinde kararlılık, çözümün zaman içinde büyümeyen hatalarla sürdürülebilmesi anlamına gelir. Eğer bir sayısal çözümde küçük hatalar hızla büyürse, bu çözüm kararsız olarak adlandırılır ve fiziksel anlamda doğru sonuçlar veremez. Bu kararlılık analizi, özellikle sonlu farklar yöntemiyle ayrıştırılan denklemlerde, bu hataların büyüyüp büyümeyeceğini belirlemek için kullanılır. Analizin temeli, diferansiyel denklemlerin çözümü sırasında Fourier analizine dayalı olarak hataların durumunu incelemektir.

Kararlılık analizi sayısal çözümlerin sadece doğruluğunu değil aynı zamanda güvenilirliğini de göstermek için kullanılan en temel alanlardan biridir. Bu analiz sayesinde, sayısal çözüm yöntemlerinin hangi koşullar altında kararlı olduğu ve hangi koşullar altında hataların hızla büyüyebileceği hakkında önemli bilgiler elde edilir.

Von Neumann analizi, lineer kısmı diferansiyel denklemler için kararlılık analizinde yaygın olarak kullanılsa da yöntem teorik olarak lineer olmayan sistemlerde de uygulanabilir. Bu anlamda analizin gücü, lineer sistemlerde kolay ve etkili bir uygulama olmasıdır. Courant-Friedrichs-Lewy şartı gibi önemli kararlılık kriterleri de Von Neumann analizi yardımı ile türetilebilir ve bu tür kararlılık şartları, sayısal çözüm parametrelerinin nasıl belirlenmesi gerektiğini ifade eder. Bu çalışmada ele alınan kararlılık analizinin matematiksel temelleri, uygulama alanları ve sayısal çözüm yöntemlerinde ne şekilde kullanıldığı ifade edilecektir. Kararlılık analizinin dört temel adımı olan ayrıştırma, Fourier modlarının çözümü, büyüme çarpanlarının hesaplanması ve kararlılık koşullarının belirlenmesi ele alınacaktır.

VON NEUMANN KARARLILIK ANALİZİ

Von Neumann kararlılık analizi, değişkenlere ayırma yardımıyla elde edilen özel çözümlerin lineer birleşimlerinin bulunmasıyla ortaya çıkan genel çözümlerin bulunmasına dayanır. Bunun nedeni, lineer algoritmalar için çözümlerin lineer birleşiminin de çözüm olmasıdır. Şimdi kararlılık analizinin nasıl uygulanacağı ifade edilsin.

Von Neumann kararlılık analizinin uygulamasını ikinci mertebeden lineer dalga denklemi ile ifade etmek uygun olacaktır. Denklemin klasik çözümünü incelemek yerine denklemi parçalayarak denklem sistemi haline getirelim. Bu durumda;

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1}$$

Dalga denkleminde c dalga hızı $c = 1$ alınarak işlemler yapılsın. Bu denklem parçalanarak sistem haline getirilirse,

$$u_t = v \quad \text{ve} \quad v_t = u_{xx} \tag{2}$$

olarak ifade edilebilir.

Eşit aralıklı grid noktaları olarak konum ve zamanı temsilen $\{(x_n, t_m)\}$ noktalarını ele alalım. Konum ve zaman parametrelerinin yeterince küçük artış miktarları da sırasıyla Δ_x ve Δ_t olarak ifade edilsin. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta_x \\ t_{m+1} &= t_m + \Delta_t \end{aligned} \tag{3}$$

olur. Bu bölünmelere göre yaklaşık çözümler

$$u(x_n, t_m) \cong u_n^m \quad \text{ve} \quad v(x_n, t_m) \cong v_n^m \tag{4}$$

şeklinde aranacaktır. Türevlerin sonlu fark karşılıkları (2) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta_t} = v_n^m + \frac{1}{2}\delta\Delta_t \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\Delta_x)^2} \tag{5}$$

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\Delta_t} = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\Delta_x)^2} + \frac{1}{2}\delta\Delta_t \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\Delta_x)^2} \tag{6}$$

Burada $\delta > 1$ olacak şekilde bir sabittir. Yukarıdaki denklemler düzenlendiğinde $\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\Delta_t} = v_n^m$ ve $\frac{v_n^{m+1}-v_n^m}{\Delta_t} = \frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\Delta_x)^2}$ olarak ifade edilebileceği açıktır. Tutarlı bir algoritma oluşması ve Δ_x ile Δ_t parametrelerinin ortadan kalkması için (5) ve (6) denklemlerine ilave terimler eklenmiştir. Buradaki en önemli husus δ parametresinin $\delta\Delta_t \leq 1$ şartını sağlayacak şekilde seçilmesidir. Denklemin çözümü elde edildikten sonra analizi yapmak için ilk yapılacak denklemde

$$u_n^m = UG^m e^{i\omega n} \text{ ve } \; v_n^m = VG^m e^{i\omega n} \tag{7}$$

dönüşümünü yapmaktır. Burada U ve V parametreleri sabitler G büyüme faktörü ve $-\pi < \omega < \pi$ grid dalga sayısıdır. $-\pi < \omega < \pi$ kısıtlaması , $e^{i\omega n}$ ifadesindeki ω'nun 2π periyodlu olmasından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle 2π aralığının dışındaki ω değerlerini kullanmanın bir anlamı yoktur. Ancak bazı durumlarda aralığı $-\pi < \omega < 2\pi$ ile sınırlamak uygun olur.
(7) eşitlikleri (5) ve (6) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} GU = \left(1 - 2\delta\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right)\right) U + \Delta_t V \\ GV = -\frac{4\lambda^2}{\Delta_t}\left(Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right)\right) U + \left(1 - 2\delta\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right)\right) V \end{cases} \tag{8}$$

olur. Burada $\lambda = \frac{\Delta_t}{\Delta_x}$ ve $-4Sin\left({}^{\omega}/_{2}\right) = e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}$ ‘dir.
Bu durum özdeğerinin G olduğu bir özdeğer problemine dönüşür.

$$G = 1 - 2\delta\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right) \pm 2i\lambda Sin\left({}^{\omega}/_{2}\right) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} |G|^2 &= \left(1 - 2\delta\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right)\right)^2 + 4\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right) \\ &= 1 - 4(\delta - 1)\lambda^2 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right) + 4\delta^4\lambda^4 Sin^2\left({}^{\omega}/_{2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Çözüm algoritmasının düzgün çalışabilmesi için bu ifadenin büyümemesi gerekmektedir. Bu nedenle $\forall\omega$ için $|G| \leq 1$, yöntemin kararlılığını ortaya koyan bir koşul olarak ifade edilir. Von Neumann, J. (1951)

Şimdi bu koşulun nasıl uygulandığını gösterelim. Her sabit ω için (10)' daki $|G|^2$ ifadesi λ^2' ye göre kuadratik polinomdur. $|G|^2 \leq 1$ olması yalnız ve yalnız

$$\delta > 1 \text{ ve } \lambda^2 \leq \frac{\delta-1}{\delta^2 Sin^2(^{\omega}/_2)} \tag{11}$$

olmasına bağlıdır. Böylece (5-6) algoritmaları için kararlılık koşulları, mümkün olan her ω değeri için (11)'den

$$\delta > 1 \text{ ve } \lambda^2 \leq \frac{\delta-1}{\delta^2}$$

olarak ifade edilir. Sonuç olarak yapılan düzenleme ile elde edilen kararlılık koşulu $\delta > 1$ ve $\lambda < \frac{\sqrt{\delta-1}}{\delta}$ şartlarını sağlamalıdır. Bu da her $\omega \neq 0$ için $|G| < 1$ koşulunun sağlanması demektir.

Genel olarak sayısal hesaplamalarda denklemin denge çözümünün korunmasına önem verilir. Bunun için ise u_n^m=sabit, $v_n^m = 0$ olması talep edilir. Bu gerekliliğin sonucu olarak $G(0) = 1$ olması durumu ortaya çıkar.

Tüm ω değerleri için $|G| \leq 1$ kısıtlaması kararlılık açısından gerekli olduğundan (2) eşitlikleri için de uygulanabilir durumdadır. Bununla birlikte bazı durumlarda $|G| \leq 1$ şartı sağlanmayabilir. $\omega = O(\Delta_x)$ ile tanımlı küçük grid sayıları yöntemin tutarlılığını garanti eder. Sıfırdan uzak olan ω sayılar büyüme olmaması için kontrol altında tutulmalıdır. Rosales, R. R. (2022)

Örnek: $u_t + u_x = 0$ denklemini ele alalım. Denklemdeki türevlere karşılık gelen sonlu fark yaklaşımı

$$u_t + u_x = 0 \tag{12}$$

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\Delta_t} + \frac{u_{n+1}^{m+1}-u_n^{m+1}}{\Delta_x} = 0 \tag{13}$$

(13) eşitliğindeki farklı zaman adımlarında çözümler aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilirse,

$$u_n^m = u(x_n, t_{m+1} - \Delta t) = u_n^{m+1} - \Delta t u_t + O((\Delta t)^2)$$
$$u_{n+1}^{m+1} = u(x_n + \Delta x, t_{m+1}) = u_n^{m+1} + \Delta x u_x + O((\Delta x)^2)$$

yazılabilir. Buradaki u_t ve u_x değerleri (x_n, t_{m+1}) noktasında hesaplanacaktır. Bu eşitlikler (13) de yerine yazıldığında O$(\Delta x, \Delta t)$ hata terimi ortaya çıkar ve denklemin tutarlı bir algoritmaya sahip olduğu söylenebilir. $\lambda = \frac{\Delta_t}{\Delta_x} > 0$ olmak üzere

$$(1-\lambda)u_n^{m+1} + \lambda u_{n+1}^{m+1} = u_n^m$$

yazılabilir. Von Neumann kararlılık analizini gerçekleştirmek için (7)' den

$$u_n^m = G^m e^{i\omega n}$$

alınır. Burada G bulunacak sabit ve $-\pi < \omega < \pi$ grid dalga sayısıdır. Bu eşitlik denklemde yerine yazıldığında

$$\left(1-\lambda+\lambda e^{i\omega}\right)G = 1$$

eşitliği ortaya çıkar. Buradan,

$$G = \frac{1}{1-\lambda+\lambda e^{i\omega}}$$

bulunur. $1/_G$,kompleks düzlemde merkezi $1-\lambda$ ve yarıçapı λ olan bir çember üzerindedir. G'nin birim çemberin içinde olabilmesi için, bu çember birim çemberin dışında olmalıdır. $\lambda > 1$ için G'nin bütün değerleri birim çemberin içine düşer. Sonuç olarak $\lambda > \lambda_c = 1$ için kararlılık koşulu sağlanır.

Courant-Friedrics-Lewy (CFL) Koşulu

Bir sayısal algoritmanın kararlı olması için gerekli olan temel şart CFL koşuludur. Özetle, bu koşul, sayısal algoritmanın, fiziksel problemin yayılım hızlarına uygun şekilde çalışması gerektiğini ifade eder. Sayısal algoritmanın çözümünde, kısmi diferansiyel denklemin çözüm alanında kullanılan veri noktalarının doğru bir şekilde işlenebilmesi için sayısal bağımlılık alanının fiziksel bağımlılık alanını kapsaması gerekir. Aksi takdirde, doğru çözüm elde edilemez. Eğer problem hiperbolik yapıda ise, CFL koşulu zaman adımına sınırlamalar getirir. Bu durumda, zaman adımı Δt, konum adımı **Δx** ile ilişkilendirilir ve genellikle şu formda ifade edilir:

$$\Delta_t \leq c\Delta_x$$

Burada **c**, problemdeki maksimum yayılma hızıdır (genellikle fiziksel parametrelerle belirlenir). Bu sınırlama, çözümün doğruluğu için gereklidir. Isı denklemi gibi, sonsuz yayılma hızına sahip problemlerde ise, zaman adımı üzerindeki sınırlama daha karmaşık hale gelir ve şu forma dönüşür:

$$\Delta_t \leq c(\Delta_x)^p$$

Burada p > 1 olmak üzere, zaman adımı konum adımının karesi veya daha yüksek bir kuvvetiyle sınırlanır. Bu durum, özellikle açık (explicit) şemalar için zaman adımını çok küçük tutmayı gerektirir bu ise hesaplamaların verimliliğini düşürebilir. Gottlieb, D.,, Shu, C.-W. (1997)

CFL koşulu, bir sayısal algoritmanın kararlı olabilmesi için, zaman ve konum adımlarının doğru bir ilişki içinde olmasını zorunlu kılar. Özellikle hiperbolik problemlerde ve sonsuz yayılma hızına sahip problemler için bu koşul farklı şekilde uygulanır. Algoritmanın doğru bir çözüm verebilmesi için bu koşula uyulması önem taşır.

Böylece, farklı λ değerleri için uygulanan çözüm yönteminin kararlılık anlamında davranışı kontrol edilebilir.

i) $\lambda < 1$ için yöntem kararsızdır.(Unstable) Ancak λ bire çok yakın olduğunda kararsızlıklar çok yavaş büyür.
ii) $\lambda > 1$ için yöntem kararlıdır.(Stable) Ancak λ birden çok büyük bir değer olursa enerji hızla dağılır.
iii) $\lambda = 1$ için algoritmanın Fourier modları gibi belirli çözüm modları için doğru çözümleri verdiğini ve özellikle hataların büyümediğini, sabit kaldığını ya da sönümlendiğini gösterir. Lax, P. D., & Richtmyer, R. D. (1956)

SONUÇ

Bu çalışmada, von Neumann kararlılık analizi yardımıyla sayısal yöntemin kararlılık ve tutarlılık özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde, küçük hataların zaman içinde büyüyerek çözümün doğruluğunu bozmasını engellemek için kullanılan yöntemlerin kararlılığı büyük bir önem taşır. Bu bağlamda, kararlılık analizlerinin temel amacı, sayısal yöntemlerin, hataların büyümesini kontrol altında tutacak şekilde çalışmasını sağlamaktır. Shu, C. W., Osher, S. (1988)

Çalışmada, sayısal şemaların kararlılığı üzerinde Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) koşulunun önemi vurgulanmıştır. CFL koşulu, hiperbolik denklemler gibi yayılma hızının sınırlı olduğu problemlerde, zaman adımı ile konum adımı arasındaki ilişkiyi düzenler. Bu koşul, zaman adımının çok büyük seçilmesi durumunda sayısal yöntemin kararsız hale gelmesini engelleyerek, doğru çözüm elde edilmesini sağlar. Özellikle şok dalgaları ve keskin geçişlerin bulunduğu durumlarda, zaman adımının konum adımına oranının uygun seçilmesi, çözümlerin kararlı kalması için kritik bir öneme sahiptir. Hataların zamanla büyümemesi ve çözümün doğruluğunun korunması için CFL koşuluna uyulması gerekmektedir. LeVeque, R. J. (2002)

Sonuç olarak, Von Neumann kararlılık analizi, sayısal yöntemlerin kararlılığı ve doğruluğu açısından vazgeçilmez bir araçtır. Hiperbolik denklemler ve şok dalgaları gibi keskin geçişlerin bulunduğu problemlerde, CFL koşulunun sağlanması ve yüksek frekanslı modların kontrol altında tutulması, doğru ve kararlı bir çözüm elde etmek için gereklidir. Gelecekte, bu tür sayısal yöntemlerin performansını daha da iyileştirmek için viskozite parametrelerinin optimize edilmesi ve kararlı fakat çözüm hassasiyetini koruyan yöntemlerin geliştirilmesi üzerinde çalışılmalıdır. Bu şekilde, hem keskin geçişleri doğru bir şekilde yakalayan hem de kararlı sonuçlar veren sayısal yöntemlerin uygulanması sağlanacaktır. Friedrichs, K. O. (1954)

Ele alınan kararlılık analizi, sayısal yöntemlerin doğruluk ve güvenilirliğini değerlendirmenin en temel yoludur. Bu analiz lineer kısmi türevli denklemlerde etkili bir şekilde uygulanmakla birlikte günümüzde daha karmaşık yöntemler için geliştirilmektedir. Günümüze kadar yapılmış çalışmalar analizin temel kurallarının yanı sıra güncel uygulamalara da yardımcı olmaktadır. Sayısal yöntemlerin kararlılık analizinde Von Neumann analizinin büyük katkısı olduğu görülmektedir.

KAYNAKÇA

Friedrichs, K. O. (1954). The mathematical theory of compressible fluid flow. John Wiley & Sons.

Gottlieb, D., & Shu, C.-W. (1997). Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. Mathematics of Computation, *67*(224), 73-85. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1997-0893975-9

Lax, P. D., & Richtmyer, R. D. (1956). Survey of the stability of linear finite difference equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, *9*(3), 267-293

LeVeque, R. J. (2002). Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge University Press.

Rosales, R. R. (2022). Lecture notes on Applications of von Neumann stability analysis to finite difference methods.

Shu, C. W., & Osher, S. (1988). Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock capturing schemes. Journal of Computational Physics, *77*(2), 439-471. https://doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5

Von Neumann, J. (1951). Various techniques used in connection with random digits. Monte Carlo Method. National Bureau of Standards.

3. Bölüm

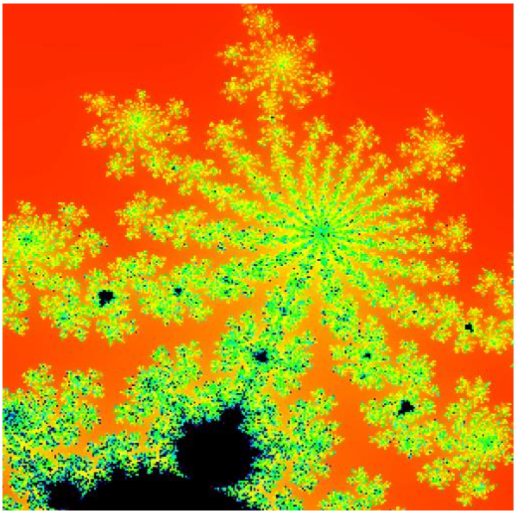
Keşfinden Sonra Mandelbrot Kümesi'ni Çözme Arayışı[1]

Figen ÇİLİNGİR[2]

[1] Yazarın bu çalışması Mandelbrot kümesi ile ilgili bir dizi çalışmanın üçüncüsüdür. Okurlara kaynaklar kısmında belirtilen diğer çalışmaları da okuması tavsiye edilir.
[2] Prof. Dr., Iğdır Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
cilingirfigen@gmail.com ORCID:0000-0001-5526-9937

GİRİŞ

Onlarca yıldır, küçük bir matematikçi grubu matematiğin en popüler resmi olan şeyin gizemini sabırla çözmeye çalışıyorlar. Yakın geçmişte bu gizemi çözerken hangi evrelerden geçildiği bu grubu oluşturan matematikçilerin bizzat kendi söylemlerinden hazırlanan bu bölüm, okuyucuya matematiğin gizli dünyasında hala keşfedilmesi gereken ne çok şey olduğunun ilhamını vermek için hazırlanmıştır. Bu küçük grup matematikçinin hikayeleri, teknolojinin en soyut matematiksel kavramları bile nasıl dönüştürdüğünü gösteriyor.



Karmaşık yapı Mandelbrot kümesinin derinliklerinde ortaya çıkar.

1980'lerin ortalarında, Walkman kaset çalarlar ve batik gömlekler gibi, Mandelbrot kümesinin böcek benzeri silüeti her yerdeydi. Öğrenciler onu dünyanın dört bir yanındaki yurt odalarının duvarlarına yapıştırdılar. Matematikçiler, bu kümenin çıktılarını alabilmek için yüzlerce talep mektupları aldılar. Scientific American'ın Ağustos 1985 sayısının kapağı, Mandelbrot kümesi ateşli kıvrımlarını sergiledi, kenarı alev alevdi; içinde okuyucuların ikonik görüntüyü kendileri için nasıl üretebileceklerini ayrıntılı olarak açıklayan dikkatli programlama komutları vardı.

O zamana kadar, bu kıvrımlar matematiğin çok ötesine, günlük yaşamın görünüşte alakasız ve ilgisiz noktalarına kadar uzanmıştı. Sonraki birkaç yıl içinde, Mandelbrot kümesi David Hockney'nin en yeni resimlerine ve birkaç müzisyenin en yeni bestelerine Bach tarzında parçalarına ilham verecekti. John Updike'ın kurgu sayfalarında görünecek ve edebiyat eleştirmeni Hugh Kenner'ın Ezra Pound'un şiirini nasıl analiz ettiğine rehberlik edecekti. Hatta psikedelik halüsinasyonların ve bilimkurgu devi Arthur C. Clarke tarafından anlatılan popüler bir belgeselin konusu olacaktı.

Mandelbrot kümesi, fraktal bir taslağa sahip özel bir şekildir. Kümenin engebeli sınırını yakınlaştırmak için bir bilgisayar kullanılır ve denizatı vadileri ve fil geçit törenleri, sarmal galaksiler ve nöron benzeri ince tellerle karşılaşılır. Ne kadar derine inilirse inilsin, her zaman orijinal kümenin neredeyse kopyaları görülür; sonsuz, baş döndürücü bir öz-benzerlik çağlayanı. Bu öz-benzerlik, Mandelbrot kümesinin popüler kültürdeki yerini sağlamlaştıran James Gleick'in en çok satan kitabı Kaos'un temel bir unsurudur. Gleick, Mandelrot fraktalı için "bir fikir evreni barındırıyordu. Modern bir sanat felsefesi, matematikte deneyin yeni rolünün bir gerekçesi, kompleks sistemleri geniş bir kitlenin önüne getirmenin bir yolu" " diye yazdı.

Mandelbrot kümesi bir sembol haline gelmişti. Yeni bir matematiksel dile, etrafımızdaki dünyanın fraktal doğasını tanımlamanın daha iyi bir yoluna olan ihtiyacı belirtiyordu. En basit kurallardan bile derin bir karmaşıklığın nasıl ortaya çıkabileceğini gösteriyordu; tıpkı hayatın kendisi gibi. Bu nedenle, kümeyi inceleyen ilk matematikçilerden biri olan John Hubbard, 1989 tarihli bir videoda, "bu resimlerin anlaşılabildiği şekilde biyolojinin de gerçekten anlaşılabilmesi, gerçek bir umut mesajıdır" demişti. Mandelbrot kümesinde düzen ve kaos uyum içinde yaşıyor; determinizm ve özgür irade uzlaştırılabiliyor. Bir matematikçi, onu gerçek ile yanlış arasındaki karmaşık sınırın bir metaforu olarak gördüğünü hatırladı.

Mandelbrot kümesi her yerdeydi, ta ki yok olana kadar. On yıl içinde ortadan kaybolmuş gibi görünüyordu. Matematikçiler başka konulara geçtiler ve halk da başka sembollere geçti. Bugün, keşfinden sadece 40 yıl sonra dahi hala çözme arayışları devam etmektedir.

Ancak bir avuç matematikçi onu bırakmayı reddetti. Hayatlarını Mandelbrot kümesinin sırlarını ortaya çıkarmaya adadılar. Şimdi, sonunda onu gerçekten anlamanın eşiğinde olduklarını düşünüyorlar. Onların hikayesi bir keşif, bir deney hikayesi ve teknolojinin düşünme biçimimizi ve dünya hakkında sorduğumuz soruları nasıl şekillendirdiğiyle ilgilidir.

ÖDÜL AVCILARI

Ekim 2023'te, dünyanın dört bir yanından 20 matematikçi, bir zamanlar Danimarka askeri araştırma üssü olan yerdeki küçük bir tuğla binada toplandı. 1800'lerin sonlarında ormanın ortasına inşa edilen üs, Danimarka'nın en kalabalık adasının kuzeybatı kıyısındaki bir fiyordun içine gizlenmişti. Girişi eski bir torpido koruyordu. Üniformalı donanma subaylarını, bir iskelede sıralanmış tekneleri ve devam eden denizaltı testlerini tasvir eden siyah beyaz fotoğraflar duvarları süslüyordu. Üç gün boyunca, şiddetli bir rüzgar pencerelerin dışındaki suyu köpüren beyaz köpüklere çevirirken, grup bir dizi konuşmaya katıldı, bunların çoğu New York'taki Stony Brook Üniversitesi'nden iki matematikçi tarafından yapıldı: Misha Lyubich ve Dima Dudko.

Atölyenin izleyicileri arasında Mandelbrot kümesinin en cesur kaşiflerinden bazıları vardı. Önde, 1990'larda kümenin sınırının olabildiğince karmaşık olduğunu kanıtlayan Kyoto Üniversitesi'nden Mitsuhiro Shishikura oturuyordu. Birkaç koltuk ötede, Shishikura ile birlikte Mandelbrot kümesinin özellikle dikkat çeken bir bölgesini incelemek için önemli teknikler geliştiren Hiroyuki Inou oturuyordu. Son sırada, matematikçilerin Mandelbrot kümesini etkileşimli olarak araştırmak için başvurdukları yazılım olan Mandel'in yaratıcısı Wolf Jung vardı. Ayrıca Toulouse Üniversitesi'nden Arnaud Chéritat, atölyeyi düzenleyen Roskilde Üniversitesi'nden Carsten Petersen ve matematikçilerin Mandelbrot kümesini anlamalarına önemli katkılarda bulunan birkaç kişi daha vardı.

Matematikçiler Misha Lyubich (sağda) ve Dima Dudko,
Mandelbrot kümesini araştırmak için onlarca yıl harcadılar.

Ve kara tahtanın başında, bu konuda dünyanın önde gelen uzmanı Lyubich ve onun en yakın çalışma arkadaşı olan Dudko duruyordu. Matematikçiler Jeremy Kahn ve Alex Kapiamba ile birlikte, Mandelbrot kümesinin geometrik yapısı hakkında uzun zamandır var olan bir varsayımı kanıtlamak için çalışıyorlardı. MLC olarak bilinen bu varsayım, fraktalı karakterize etmek ve onun karmaşık vahşi doğasını evcilleştirmek için on yıllardır süren arayışın son engelidir. Indiana Üniversitesi'nden Caroline Davis, güçlü bir araç seti inşa edip keskinleştirerek matematikçilerin "Mandelbrot kümesindeki hemen hemen her şeyin" geometrisini kontrol altına aldıklarını söyledi; ancak kalan birkaç vaka vardı.

Lyubich ve Dudko, diğer matematikçileri MLC'yi kanıtlama yolundaki son gelişmeler ve bunu yapmak için geliştirdikleri teknikler hakkında bilgilendirmek için Danimarka'daydılar. Son 20 yıldır araştırmacılar, Mandelbrot kümesini oluşturmak için kullanılan sayı ve fonksiyon türlerinin matematiksel çalışması olan kompleks analiz alanındaki sonuçları ve yöntemleri ortaya çıkartmak için burada toplandılar.

Karen Dias, bu toplantının alışılmadık bir çalışma tarzı biçiminde olduklarını şöyle anlattı. Matematikçiler tüm yemeklerini birlikte yiyorlardı ve sabahın erken saatlerine kadar biralar eşliğinde sohbet edip gülüyorlardı. Sonunda uyumaya karar verdiklerinde, tesisin ikinci katında paylaştıkları küçük odalardaki ranzalara veya karyolalara çekiliyorlardı. Katılımcılardan biri bana atölyenin genellikle çok sayıda genç matematikçiyi çektiğini söyledi. Ancak bu sefer durum böyle değildi; belki de yarıyılın ortasında olmasından ziyade konunun oldukça zor olmasından olsa gerek, tam da o anda, alanın en iyilerinin önünde konuşma yapma ihtimalinden biraz çekindiğini de itiraf etti.

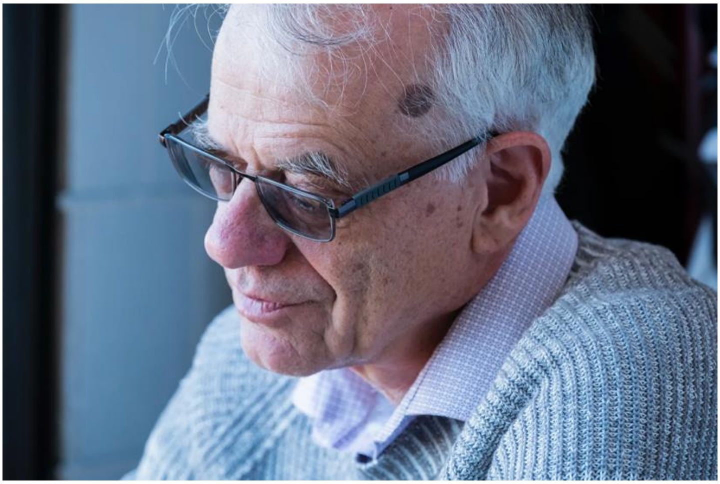
Alex Kapiamba (solda) ve Jeremy Kahn, Mandelbrot kümesinin geometrisini kontrol altına almaya çalışırken, genellikle Rhode Island, Providence'daki Brown Üniversitesi kampüsünün yakınındaki Kahn'ın arka bahçesindeki bir kara tahta üzerinde birlikte çalışıyorlar.

Ancak kompleks analizin daha geniş alanındaki çoğu matematikçi artık doğrudan Mandelbrot kümesi üzerinde çalışmadığı için, neden MLC'ye bütün bir atölye çalışması ayırıyoruz? Aslında ayırmak da gerek çünkü gizeminin çözülmesi için çok yılların geçeceğini tahmin etmek zor değil.

Mandelbrot kümesi bir fraktaldan daha fazlasıdır. Dinamik sistemlerin bir tür ana kataloğu olarak hizmet eder. Bir noktanın basit bir kurala göre uzayda hareket edebileceği tüm farklı yollarını içerir. Bu ana kataloğu anlamak için, birçok farklı matematiksel manzarayı geçmek gerekir. Mandelbrot kümesi sadece dinamiklerle değil, aynı zamanda sayılar teorisi, topoloji, cebirsel geometri, grup teorisi ve hatta fizikle de derinden ilişkilidir. Hindistan'daki Tata Temel Araştırma Enstitüsü'nden Sabyasachi Mukherjee, "Matematiğin geri kalanıyla güzel bir şekilde etkileşime giriyor," dedi.

Matematikçiler, MLC'de ilerleme kaydetmek için, Chéritat'ın "güçlü bir felsefe" olarak adlandırdığı kompleks bir teknik seti geliştirmek zorunda kaldılar. Bu araçlar çok ilgi gördü. Bugün, daha geniş anlamda dinamik sistemlerin incelenmesinde merkezi bir sütun oluşturuyorlar. Mandelbrot kümesiyle hiçbir ilgisi olmayan bir dizi başka problemi çözmek için çok önemli oldukları ortaya çıktı. Ve MLC'yi genel bir sorudan, alanın en derin ve en önemli açık varsayımlarından birine dönüştürdüler. Bu felsefeyi bugünkü biçimine sokmaktan muhtemelen en çok sorumlu olan matematikçi Lyubich, atölyedeki diğer matematikçiler bir kavramı tartışmak veya bir soru sormak için yanına yaklaştığında, gözlerini kapatır ve kalın kaşları çatılmış bir şekilde dikkatle dinler. Dikkatlice, Rus aksanıyla cevaplar, zamanını ve tavsiyelerini cömertçe paylaşır[c]diye ifade etmiştir. Lyubich'in eski doktora sonrası araştırmacılarından ve sık sık işbirlikçilerinden biri olan Mukherjee, "Gerçekten de birkaç nesil matematikçi yetiştirdi" demiştir. Anlattığına göre, karmaşık dinamiklerin incelenmesiyle ilgilenen herkes Stony Brook'ta Lyubich'ten öğrenmek için biraz zaman geçiriyor. Mukherjee, "Misha'nın belirli bir projeyi nasıl ele almamız gerektiği veya daha sonra neye bakmamız gerektiği konusunda bir vizyonu var" diyor. "Aklında büyük bir resim var. Ve bunu insanlarla paylaşmaktan mutluluk duyuyor". O sıralar, Lyubich ilk kez o büyük resmi bütünüyle görebildiğini hissediyordu.

[c] Bu bölümün yazarı da 2000 yılında Bercelona Üniversitesi'nde Lyubich'in bir haftalık yoğun kurs programına katılmıştır.



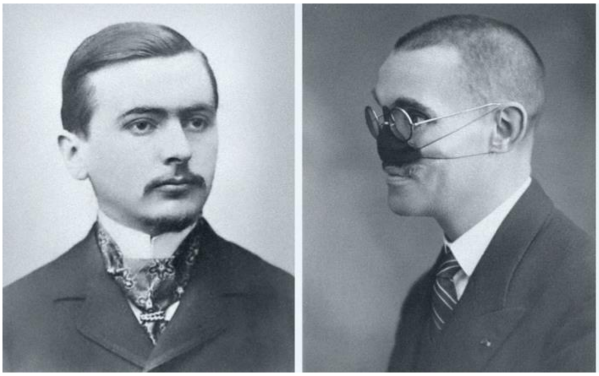
*Lyubich, şu anda Stony Brook Üniversitesi'nde yönettiği enstitüde nesiller boyu matematikçi yetiştirdi***.**

ÖDÜL SAVAŞÇILARI

Mandelbrot kümesi bir ödülle başladı. 1915'te, fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalardaki son gelişmelerden ilham alan Fransız Bilimler Akademisi bir yarışma duyurdu. Bu yarışmada, üç yıl içinde yineleme süreci üzerinde yapılan çalışmalar için 3.000 franklık büyük ödül verecekti ve bu süreç daha sonra Mandelbrot kümesini üretecekti.

Tekrarlama, bir kuralın tekrar tekrar uygulanmasıdır. Bir sayıyı bir fonksiyon tanımı altındaki kurala göre yazarsanız, sonra çıktıyı bir sonraki girdiniz olarak kullanırsınız. Bunu yapmaya devam edin ve zaman içinde ne olduğunu gözlemleyin. Fonksiyonunuzu tekrarlamaya devam ettikçe, elde ettiğiniz sayılar hızla sonsuza doğru gider. Ya da mıknatısa doğru hareket eden demir talaşları gibi belirli bir sayıya doğru çekilebilir. Ya da asla kaçamayacakları sabit bir yörüngede aynı iki sayı, üç veya bin sayı arasında zıplayabilirler. Ya da kafiye veya mantık olmadan bir sayıdan diğerine atlayabilir, kaotik, öngörülemez bir yol izleyebilirler. Bunlar kritik noktaların sınıflandırmasıdır; itici, çekici ve nötr sabit noktalar.

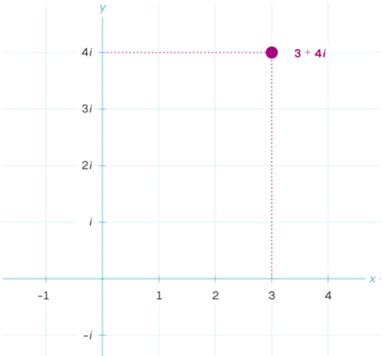
G.Julia ve P.Fatou 1918 yılında yazdıkları 198 sayfalık makaleleri[6],[9] ile Mandelbrot kümesinin ortaya çıkmasına yol açacak olan yinelemeli fonksiyonların incelenmesine öncülük ettiler. Bugün Julia kümeleri hakkında ne biliniyorsa tamamen o makalenin sunduğu bilgilere borçluyuz. Fransız Akademisi ve daha genel olarak matematikçilerin yinelemeyle ilgilenmek için başka bir nedeni daha vardı. Süreç, dinamik sistemlerin incelenmesinde önemli bir rol oynadı. Gezegenlerin güneş etrafındaki dönüşü veya türbülanslı bir akarsuyun akışı gibi sistemler, belirli bir dizi kurala göre zaman içinde değişen sistemler konusu merak ediliyordu.



1910'larda Fransız matematikçiler Pierre Fatou (solda) ve Gaston Julia

Ödül, iki matematikçiyi tamamen yeni bir çalışma alanı geliştirmeye teşvik etti. İlki, başka bir hayatta bir donanma adamı olabilecek (bir aile geleneği) Pierre Fatou'ydu, eğer sağlığı kötü olmasaydı. Bunun yerine matematik ve astronomi alanında bir kariyer peşinde koştu ve 1915'e gelindiğinde analizde birkaç önemli sonucu çoktan kanıtlamıştı. Sonra, Fransız işgali altındaki Cezayir'de doğan ve çalışmaları I. Dünya Savaşı ve Fransız ordusuna askere alınması nedeniyle kesintiye uğrayan gelecek vaat eden genç bir matematikçi olan Gaston Julia vardı. 22 yaşında, hizmetine başladıktan kısa bir süre sonra ciddi bir yaralanma geçirdi. Daha sonra doktorlar hasarı onaramayınca hayatının geri kalanında yüzünde deri bir kayış ile devam etti. Matematiğe geri döndü ve Akademi ödülü için sunacağı çalışmalardan bazılarını bir hastane yatağında yaptı.

Ödül hem Fatou'yu hem de Julia'yı fonksiyonları yinelediğinizde ne olduğunu incelemeye motive etti. Bağımsız olarak çalıştılar, ancak çok benzer keşifler yaptılar. Sonuçlarında o kadar çok örtüşme vardı ki, şimdi bile, ödülün nasıl ve kime verileceği konusu net değil. Julia daha dışa dönüktü ve bu nedenle daha fazla ilgi gördü. Sonunda ödülü kazandı; Fatou ödül için başvuru bile yapmadı. Bu çalışma nedeniyle, ikisi artık kompleks dinamik sistemler alanının kurucuları olarak kabul ediliyor. "Kompleks", çünkü Fatou ve Julia, bilinen bir gerçek sayıyı sözde hayali bir sayıyla (matematikçilerin -1'in karekökünü belirtmek için kullandıkları sembol olan i'nin bir katı) birleştiren kompleks sayıların fonksiyonlarını yinelediler. Gerçek sayılar bir doğru üzerindeki noktalar olarak düzenlenebilirken, kompleks sayılar bir düzlem üzerindeki noktalar olarak şu şekilde görselleştirilir:



Kompleks bir sayının gerçek kısmı x ekseninde, sanal kısmı ise y ekseninde yer alır.

Fatou ve Julia, kompleks fonksiyonların matematik alanında bir paradoks değil, yinelenmesinin, başlangıç noktasına bağlı olarak zengin ve karmaşık davranışlara yol açabileceğini buldular. Bu davranışları belgelemeye ve bunları geometrik olarak temsil etmeye başladılar. Ancak daha sonra çalışmaları yarım yüzyıl boyunca belirsizliğe gömüldü. Zürih Üniversitesi'nde profesör olan Artur Avila, "insanlar ne arayacaklarını, hangi soruları soracaklarını bile bilmiyorlardı" dedi. 1970'lerde bilgisayar grafikleri yaygınlaşınca bu durum değişti.

Benoit B.Mandelbrot(1924-2010)

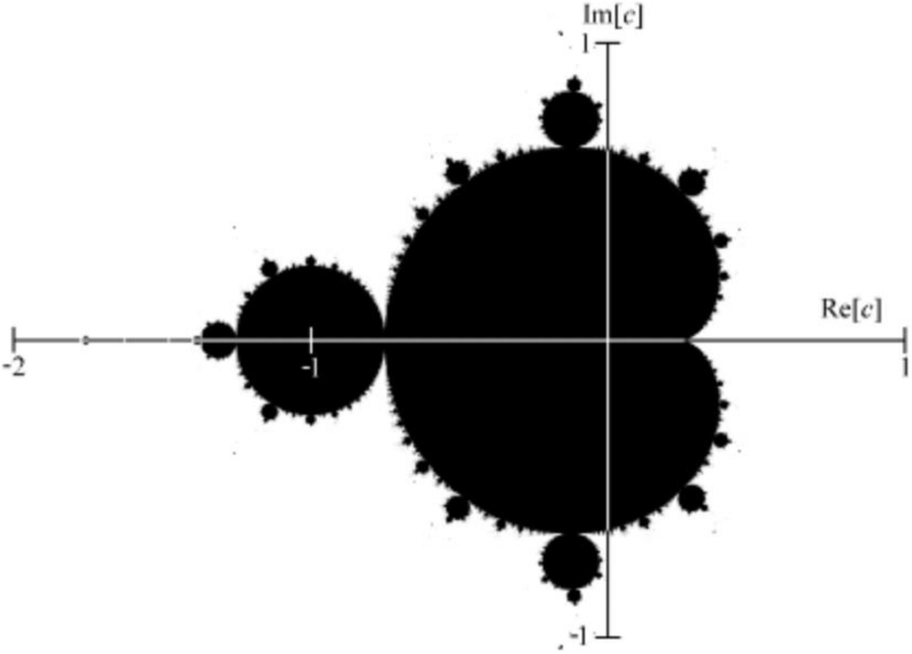
Günümüzde "fraktal" terimini ortaya atan Benoit B. Mandelbrot, aynı zamanda finansal piyasaların ve jeolojik olayların davranışlarını da incelemiştir[1]. O zamana kadar, matematikçi B.B. Mandelbrot akademik bir amatör olarak ün kazanmıştı. New York Şehri'nin kuzeyindeki IBM araştırma merkezinde çalışırken ekonomiden astronomiye kadar birçok farklı alanda çalışmıştı. 1974'te IBM üyesi olarak atandığında, bağımsız projeler yürütmek için daha da fazla özgürlüğe sahipti. Merkezin önemli hesaplama gücünü karmaşık dinamikleri uyku halinden çıkarmak için kullanmaya karar verdi.

Mandelbrot ilk başta Fatou ve Julia'nın incelediği türden şekiller üretmek için bilgisayarları kullandı. Görüntüler, bir başlangıç noktasının, yinelendiğinde, sonsuza kaçacağı ve başka bir desene hapsolacağı zaman hakkında bilgi kodluyordu. Fatou ve Julia'nın 60 yıl önceki çizimleri daire ve üçgen kümeleri gibi görünüyordu ancak Mandelbrot'un yaptığı bilgisayar tarafından üretilen görüntüler ejderhalara ve kelebeklere, tavşanlara ve katedrallere ve karnabahar başlarına, hatta bazen bağlantısız toz bulutlarına benziyordu. O zamana kadar Mandelbrot, farklı ölçeklerde benzer görünen şekiller için "fraktal" kelimesini çoktan türetmişti; kelime yeni bir tür geometri kavramını çağrıştırıyordu; parçalanmış, kesirli veya kırık bir şey.

Bilgisayar ekranında beliren görüntüler (bugün Julia kümeleri olarak biliniyor) Mandelbrot'un gördüğü en güzel ve karmaşık fraktal örneklerinden bazılarıydı. Fatou ve Julia'nın çalışmaları bu kümelerin her birinin ve bunlara karşılık gelen fonksiyonların geometrisi ve dinamiklerine ayrı ayrı odaklanmıştı. Ancak bilgisayarlar Mandelbrot'a bir fonksiyon ailesinin tamamını aynı anda düşünme imkanı verdi. Bunların hepsini adını taşıyacak görüntüye kodlayabilirdi.

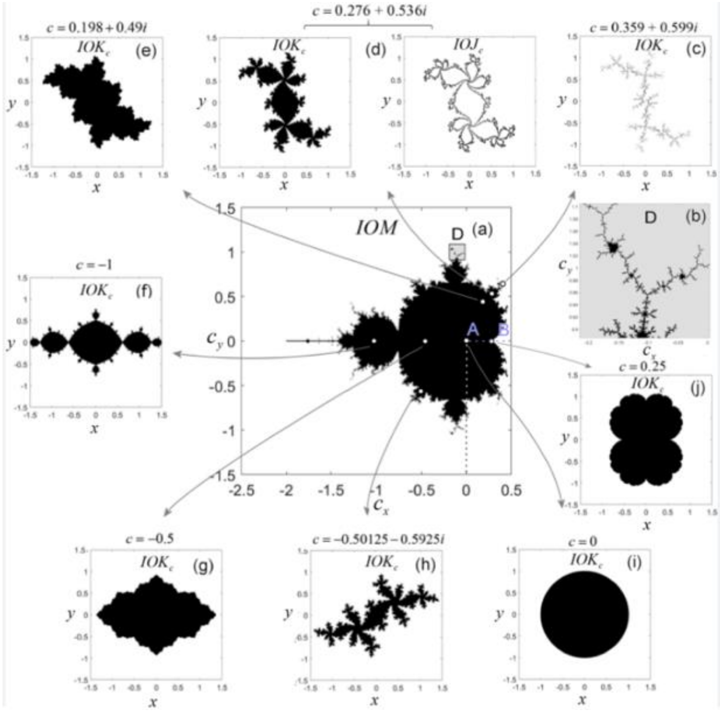
Mandelbrot kümesi, yineleme yapıldığında hala ilginç görüntüler ortaya çıkartan en basit denklemlerle ilgilenir. Bunlar $f(z) = z^2 + c$ biçimindeki ikinci dereceden fonksiyonlardır. c sabit değeri herhangi bir kompleks sayı olabilir. Denklemi $z = 0$ ile başlayarak yinelerseniz ve ürettiğiniz sayıların küçük (veya matematikçilerin dediği gibi sınırlı) kaldığını görürseniz, o zaman c Mandelbrot kümesindedir. Öte yandan, yineleme yaparsanız ve sonunda sayılarınızın sonsuza doğru artmaya başladığını görürseniz, o zaman c Mandelbrot kümesinde değildir. c'nin sıfıra yakın değerlerinin kümede olduğunu göstermek basittir. Ve c'nin büyük değerlerinin olmadığını göstermek de aynı şekilde basittir. Ancak kompleks sayılar adlarına uygundur; kümenin sınırı muhteşem derecede karmaşıktır. c'yi küçük miktarlarda değiştirmenin sınırı geçmeye devam etmenize neden olması için belirgin bir neden yoktur, ancak yakınlaştırdığınızda sonsuz miktarda ayrıntı ortaya çıkar.

Dahası, Mandelbrot kümesi aşağıdaki etkileşimli şekilde görülebileceği gibi Julia kümelerinin bir orkestra şefi gibi davranır. Mandelbrot kümesinde herhangi bir c değeri seçersek. Karşılık gelen Julia kümesi bağlantılı olacaktır. Ancak Mandelbrot kümesini terk edersek, karşılık gelen Julia kümesi bağlantısız toz zerreciklerini andıran görüntüye bürünecektir.



Yukarıdaki Mandelbrot kümesinde seçilen bir noktaya karşılık gelen Julia kümesi aşağıda gösterilmiştir. (Mandelbrot kümesinden çok uzakta olan bazı Julia kümeleri görülemeyecek kadar soluktur.)

Kümenin ilk yayınlanan resmi, sadece birkaç yüz yıldız işaretinden oluşan kaba bir çizimdi ve 1978'de grup teorisi ve hiperbolik geometride görünüşte alakasız bir soruyu inceleyen matematikçiler Robert Brooks ve J. Peter Matelski'nin bir makalesinde yer aldı. Kümeyi tanıyan ve popülerleştiren Mandelbrot oldu. IBM'in bilgisayarlarını kullanarak yüzlerce Julia kümesini grafiklendirdikten sonra hepsini aynı anda temsil etmeye çalıştı. 1980'de, Brooks ve Matelski'den çok daha gelişmiş bir hesaplama gücüyle donanmış olarak, Mandelbrot kümesinin çok daha iyi bir versiyonunu üretti ancak günümüz standartlarına göre hala kaba bir şekildir.



Çalışmasına tutkuyla bağlandı ve fraktalı mümkün olduğunca halka açık bir görüntü haline getirmeye karar verdi. Kümeye onun adının verilmesinin nedeni budur. Mandelbrot'un kendisi, derin sonuçlar ispatlamadan bir konudan diğerine atlama alışkanlığı ve Mandelbrot kümesi gibi keşiflerin itibarını kendine mal etme çabasında sık sık sert davranması nedeniyle matematikçiler arasında pek sevilmiyordu.

Hiç kimse ikinci dereceden denklemler dünyasının ne kadar zengin olabileceğini tahmin etmemişti. İtalya'daki Parma Üniversitesi'nden Anna Benini, "Bu, basit görünümlü bir taş kristal oyuk(geode), açtığınızda ve içinde tüm bu kristaller gözüktüğünde tamamıyla inanılmaz karmaşık bir yapıyla karşılaşıyorsunuz" dedi ve "Matematikçiler daha önce hayal etmedikleri şeyleri görüyorlar" diye ilave etti. Ancak Avila. "Günümüzde hepimiz bu keşiflere çok şey borçluyuz." ifadesini kullanarak bu keşfin ne denli önemli olduğunu vurguladı.

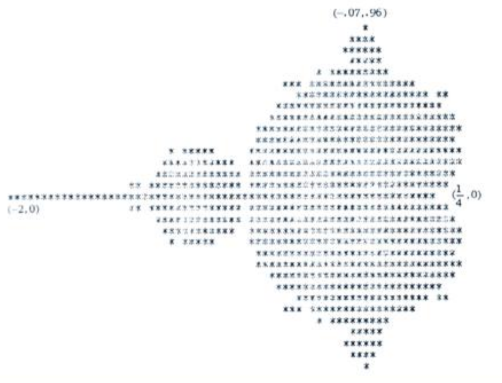
J. H. Hubbard ve matematikçi Adrien Douady, sadece birkaç yıl içinde hem Mandelbrot kümesi hem de temsil ettiği Julia kümeleri hakkında çok sayıda sonuç ispatladılar. Ancak ispatları el yazısıyla yazılmıştı, bu yüzden ispatlar için Hubbard "çoğunlukla sadece Douady ve ben anlayabiliriz," dedi. Ve böylece 1983'te Douady, bu erken sonuçları açıklamak için bir dizi ders verdi. Daha sonra, derslerinden gelen materyali Orsay notları olarak adlandırılan tek bir belgede derledi. Yaklaşık 200 sayfa uzunluğunda olan bu belge, hızla alanın kutsal kitabı haline geldi[5].

Adrien Douady (solda) ve John Hubbard, Mandelbrot kümesinin bağlantılı olduğunu gösteren ilk matematikçilerdi[2].

Orsay notlarında, Douady[d] ve Hubbard gördükleri bilgisayar görüntülerinden ilham alan birkaç önemli teoremi ispatladılar. Mandelbrot kümesinin bağlantılı olduğunu gösterdiler; yani kaleminizi kaldırmadan kümedeki herhangi bir noktadan diğerine bir çizgi çizebileceğiniz gibi teorileri ispatladılar. Fakat Mandelbrot başlangıçta bunun tam tersini düşünmüştü; kümenin ilk görüntüleri tıpkı etrafında bir denizde yüzen birçok küçük ada olan büyük bir adaya benziyordu. Ancak daha sonra, kümenin dışındaki denklemlerin ne kadar çabuk sonsuza uçtuğunu göstermek için renk kullananlar da dahil olmak üzere daha yüksek çözünürlüklü resimler gördükten sonra Mandelbrot tahminini değiştirdi. Bu küçük adaların hepsinin çok ince kıvrımlarla birbirine bağlı olduğu ortaya çıktı. Kopenhag Üniversitesi'nden Søren Eilers, rengin tanıtımının "çok sıradan bir şey ama önemli" olduğunu söyledi.

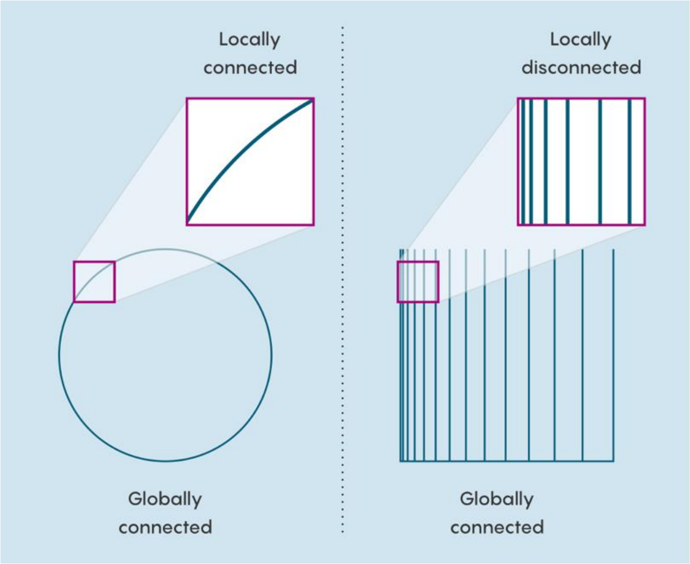
---

[d] Adrien Douady (1935-2006) 



Nokta vuruşlu bir yazıcıda üretilen Mandelbrot kümesinin ilk yayımlanmış çizimi, 1978'de Robert Brooks ve J. Peter Matelski tarafından bir makalede yer aldı[1].

Søren Eilers ,"Onu, etraflarında bir mürit okulu olan Rönesans ressamlarıyla karşılaştırırdım," dedi. Toulouse Üniversitesi'nde matematikçi ve Douady'nin eski doktora öğrencilerinden biri olan Xavier Buff, "Çok heyecan vericiydi" diye ilave etti. Orsay notlarının önemli bir kısmı, yakında Mandelbrot kümesiyle ilgili en önemli soru haline gelecek olan mütevazı bir ifade olan MLC varsayımıdır. MLC, Mandelbrot kümesinin sadece bağlantılı olmadığını, yerel olarak bağlantılı olduğunu ileri sürer. Mandelbrot kümesine ne kadar yakınlaştırırsanız yakınlaştırın, her zaman tek bir bağlantılı parça gibi görünecektir. Örneğin, bir daire yerel olarak bağlantılıdır. Öte yandan, son derece ince dişli bir tarak bağlantılı değildir. Tüm şekil bağlantılı olsa da şaftı atlayıp bunun yerine dişlerinin bazılarının uçlarına yakınlaştırırsanız, yalnızca bir sürü ayrı çizgi parçası görürsünüz.



Mandelbrot kümesinin geometrisi hakkında açık bir ifade olmasına rağmen, MLC kısa sürede inanılmaz derecede zor olduğu yönünde bir ün kazandı. Birçok matematikçi üzerinde çalışmaktan çekiniyordu. Çok teknik ve zaman alıcı görünüyordu; birinin dikkatini çekmesi riskli bir problemdi. Birden fazla matematikçi bu yüzden matematiği bıraktı. Avila, öğrencilerini ilerleme kaydetmek için gereken tüm matematiği öğrenecekleri zamana kadar MLC'den ve ilgili araştırma alanlarından aktif olarak uzaklaştırıyor. "Aslan Kral'dan alıntı yapıyorum ve diyorum ki, "Bakın, dinamiklerin tamamı var. Görebildiğiniz tek şey alanınız. Ancak keşfetmemeniz gereken karanlık bir köşe var. Çünkü bu kısmı keşfederseniz, tuzağa düşersiniz ve asla çıkamazsınız," dedi. "Buna girmek için öğrenmeniz gereken çok şey var." Ancak bazı matematikçiler buna karşı koyamadı.

SADECE ODAKLAN

Misha Lyubich, 1960'larda Ukrayna'nın ikinci büyük şehri olan Harkov'da büyüdü. Stalin ölmüştü; Nikita Kruşçev kısa bir süre iktidarda kaldı ancak kısa süre sonra yerine Leonid Brejnev geçti. Sovyet ekonomisi gelişti ancak on yıl ilerledikçe durgunlaştı. Batı ile gerginlikler her zamankinden yüksekti. Lyubich'in babası Harkov Üniversitesi'nde matematik profesörüydü, annesi ise programcıydı; gençliğinde evine başka matematikçilerin geldiğini ve matematiğin her zaman havada olduğunu, sık sık konuşulan bir konu olduğunu hatırlıyordu ve "etrafımdaki hayat hep matematikti," diye ifade ediyordu. Lyubich, Sovyetler Birliği'nde bir Yahudi olarak "Yahudilerin çeşitli alanlarda aktif olarak yer almasını engellemeye çalışan devlet politikaları vardı" diye ifade ederken iyi üniversitelere girmekte zorluk çektiğini vurguladı. Moskova Devlet Üniversitesi'ne başvurdu ancak reddedildi. Sovyetler Birliği'nin prestijli Matematik Olimpiyatları yarışmalarında en iyi öğrencilerden ve en yüksek dereceli katılımcılardan biri olmasına rağmen, sözlü sınavını geçemediği söylendi. Sınav görevlileri ona nerede hata yaptığını söylemeyi reddetti.

Sonunda Yahudi öğrencileri liyakatle kabul eden en iyi lisans kurumlarından biri olan Kharkiv Üniversitesi'ne gitti. Babası, öğrencilerin genellikle yalnızca Moskova üniversitelerinde bulabilecekleri dersleri veriyordu. O yıllarda Moskova, Sovyetler Birliği'ndeki matematiksel ilerlemenin merkeziydi. Lyubich, "o zamanlar babamın matematiğe dair daha geniş bir vizyon edinmek için sağladığı benzersiz bir fırsattı" dedi. Özellikle babası onu kompleks dinamiklerdeki problemler hakkında düşünmeye teşvik etti. Kompleks Dinamik sistemler alanı, Sovyetler Birliği'nde hiç ilgi görmeyen bir alandı. Lyubich, "O zamanlar bu alanda çalışan kimseyi görmedik" dedi. Hızla konuya odaklandı. Üniversite yıllarında "esas itibarıyla durmadan" matematik hakkında düşünmeye başladı. Sınıfında ikinci olmasına rağmen, lisansüstü programlara girmekte zorlandı. Sonunda babasının meslektaşlarının olduğu, 3.000 kilometreden fazla uzaktaki Özbekistan'daki Taşkent Devlet Üniversitesi'ne gitti. Douady ve Hubbard'ın Fransa'da yaptığı işlerden habersiz ve onlardan izole bir şekilde karmaşık dinamikleri incelemeye devam etti. "Bir nevi yalnızdım," dedi ve "oldukça yalnızdım" diye devam etti.

Üniversite öğrencilerinin sonbahar aylarında tarımsal işlerde çalışmaları gerekiyordu. Lyubich, "Üniversiteler esasen Ekim ve Kasım aylarında boşalırdı," dedi. Ve böylece kendini Taşkent dışındaki tarlalarda pamuk toplarken bulduğunu söyledi. O zamanlar Sovyetler Birliği'nin ana pamuk tedarikçisi Özbekistan'dı. Gün doğumundan gün batımına, 32 derecelik sıcakta, sadece birkaç fit yüksekliğindeki bitkilerin üzerine eğilmesine rağmen yine de kendini şanslı görüyordu. Lisans öğrencilerinin bir kotayı doldurmaları gerekiyordu. Kota o kadar yüksekti ki, "beceri gerektiriyordu" dedi ve "benim için mümkün olmayacak" belimi kıran bir işe dönüşmüştü.

Ve böylece, Lyubich "Sadece pamuk tarlalarında dolaşıp matematik hakkında düşünüyordum", diye o günleri anlattı. Özellikle, kompleks ikinci dereceden denklemlerin parametre uzayı hakkında düşünmeye başladı. İlk bilgisayar görüntüleri Batı'da ortaya çıkmış olsa da Lyubich'in bunlara erişimi yoktu. Bunun yerine, Mandelbrot kümesinin temel özelliklerini zihninde şekillendirdiği fraktalın ana kardiyoid adı verilen merkezi kalp şeklindeki bölgesi ve şekli x-ekseni boyunca yatay olarak ikiye bölen kümenin omurgasının yönleri oluşturdu.

"Sadece zihnimde bir resim oluşturdum ve anlamaya çalıştım" dedi. "Bu resmin içinde saklı soruların ne kadar derin olduğunu bilmiyordum" diye ifade etti.

Mart 1982'de Lyubich hala lisansüstü öğrencisiyken neslinin en seçkin Amerikalı matematikçilerinden biri olan John Milnor, o zamanlar İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde profesördü, bir konuşma yapmak üzere Moskova'yı ziyaret etti. Üniversite, Lyubich'in zamanını nerede geçireceği konusunda esnek davrandığı için, sınavlarını ve tezini ve de pamuk toplama görevlerini tamamladığı sürece, seminerlere katılmak ve orada çalışan matematikçilerle görüşmek için sık sık Moskova'ya giderdi. Milnor ziyaret ettiğinde orada olması da tesadüftü. Milnor konuşmasını bitirdikten sonra, Lyubich ile biraz konuştular. Dil engeli nedeniyle ya bir şeyler yazdılar ya da Lyubich'in meslektaşlarından birinin tercüme etmesine yardım ettiler. Lyubich için Demir Perde'nin diğer tarafında ilgili çalışmaların yapıldığı açıktı. "Bu, batı matematiğiyle bu yöndeki ilk temasımdı" dedi. Milnor, eve döndükten sonra Lyubich'in araştırmalarından bazılarını bilim camiasına duyurdu. Lyubich, "iletişim çok zayıftı, ancak Milnor ile tanışmam benim şansımdı" dedi. Ve daha sonra Douady, Lyubich'e, Lyubich'in MLC problemini ilk öğrendiği Orsay notlarının bir kopyasını gönderdi. Yine de Lyubich, MLC hakkında gerçekten birkaç yıl daha düşünmeye başlamayacaktı. Başka problemler üzerinde çalışıyordu ve 1984'te doktorasını tamamladıktan sonra, kendisi de bir matematikçi olan eşiyle birlikte Leningrad'a (şimdiki St. Petersburg) taşındı ve burada Yahudi olduğu için akademik işlerden bir kez daha men edildi. Sonraki beş yıl boyunca, bunun yerine bir lise öğretmeni, "yarı araştırma enstitüsü" (tıbbi teknolojilere odaklanmış) olarak adlandırdığı bir kurumda programcı ve son olarak Arctic(Kuzey Kutup Bölgesi) ve Antarktika'nın kapsamlı çalışmalarını yapan bir bilimsel enstitüde modelleyici olarak çalıştı. Her yeni işte, dinamik sistemlerdeki matematiksel ilgi alanlarına odaklanabilmeye giderek daha da yaklaştı.

Bu yıllar boyunca, matematik problemleri üzerinde çalışmaya devam etti. Seminerlere katıldı, diğer matematikçilerle tanıştı ve sonuçlar üretmeye devam etti. Lyubich, "hiç durmadım," dedi. "Görüyorsunuz, durursanız, toparlanmak çok zordur. Durmamalısınız". Lyubich, tüm gün lise öğrencilerine ders verdikten sonra özellikle bitkin hissettiğini ve ardından akşamın geri kalanını matematik çalışarak geçirmeye zorladığını hatırlıyor. "Kendimi tam olarak matematiğe adayamadığım için hayal kırıklığına uğradım, ki yapmak istediğim şey tamamen matematik çalışmaktı" dedi. Ama "ne olursa olsun, matematik yapacağıma kendi kendime karar verdim".

"Perestroyka'nın gelmesi ve ayrılmama izin verilmesi benim için büyük bir şanstı," diye ekledi. "Bunu ne kadar süreyle sürdürebileceğimi bilmiyorum." 1989'da eşiyle birlikte Sovyetler Birliği'nden mülteci olarak ayrılmalarına izin veren bir vize aldılar. Ceplerinde sadece birkaç yüz dolar ile önce Viyana'ya, sonra İtalya'ya gittiler ve burada Amerika Birleşik Devletleri'ne taşınmak için başvuruda bulundular. İtalya'daki bir mülteci kampında evrak işlerinin işlenmesini bekleyerek birkaç ay geçirdikten sonra (bu süre zarfında Lyubich yerel üniversitelerde konuk dersler vererek ek gelir elde etti) eşiyle birlikte sonunda New York'a vardılar. Lyubich'i orada bekleyen bir iş vardı. Milnor (Lyubich'in iletişimini sürdürdüğü kişi) onu Stony Brook Üniversitesi'nde başlattığı yeni Matematik Bilimleri Enstitüsü'nde çalışmaya davet etmişti.

Lyubich İtalya'dayken ilk kez e-postaya erişim sağladı ve orada Douady'den bir e-posta aldı. Douady, matematiksel tartışmalar ve iş birlikleri için e-postanın kullanılmasının ilk savunucularından biriydi. Eski lisansüstü öğrencilerinden Pierre Lavaurs, "80'lerde yeni bir şey olan uzaktaki işbirlikçileriyle fikir alışverişinde bulunmak için çok çalıştı" dedi.

E-posta, Lyubich'e ve alandaki diğer matematikçilere, Jean-Christophe Yoccoz'un Mandelbrot kümesindeki hemen hemen her noktada yerel bağlantıyı kanıtladığını bildirdi. MLC, tam kümenin daha küçük, kendi kendine benzer kopyalarının sonsuz bir yuvasında bulunmayan c değerleri için doğruydu. Yoccoz daha sonra, kısmen bu çalışması nedeniyle, matematiğin en büyük onuru olarak kabul edilen Fields Madalyası ile ödüllendirilecekti.

Fransız matematikçi Jean-Christophe Yoccoz'un

Fransız matematikçi Jean-Christophe[e] Yoccoz'un öncü çalışması, karmaşık dinamiklerdeki en büyük açık problemlerden biri olan MLC varsayımını, matematiksel renormalizasyon teorisine bağladı.

[e] Jean-Christophe Yoccoz(1957-2016)

Gerd Fischer/Archive of the Mathematisches Forschunginstitut Oberwolfach Douady, e-postada MLC'ye yönelik tam çözümün hemen köşede olduğunu söyledi. İyimser hisseden tek kişi o değildi. Imperial College London'dan Davoud Cheraghi, "Mandelbrot setinin yerel bağlantısıyla sadece birkaç yılda başa çıkabileceklerini düşünen insanlar vardı" dedi. Bunun yerine, onlarca yıllık çalışma kaldı. MLC'nin, yalnızca bir avuç matematikçinin üzerinde çalışmaya devam edebildiği çok incelikli, neredeyse imkansız derecede zor bir problem olduğu ortaya çıktı. Matematiğin her yerinden araçlar ve kompleks dinamikler alanını sonsuza dek değiştirecek yeni bir teorinin geliştirilmesi gerekecekti. Önde giden, matematiksel yolculuğunun başından beri bir parçası olan ısrarla bu konuda donanıma sahip olan Lyubich'ti.

BİR ŞEHİR İÇİNDE BİR ŞEHİR

Matematiği bilimlerin en safı olarak düşünme eğilimindeyiz. Bu konu soyut, mesafeli, güzellik ve mantıkla yönlendirilen bir üne sahiptir. Ellerini kirletmez veya "uygulamalar" gibi somut bir şeyle ilgilenmez. Bu isimde bile vardır. "Pure matematik"i "uygulamalı matematik"ten ayırıyoruz. Matematik makalelerinin yazılma biçimi yardımcı olmuyor. Genellikle yalnızca nihai ispatlar ve teoremler yayınlanır, onlara yol açan dolambaçlı süreç yayınlanmaz. Bu matematiğin modern bir anlayışıdır ve 19. yüzyılın sonlarında sağlamlaşmaya başlamıştır. Matematikçiler tanımlarını daha titiz hale getirmeye çalıştıkça ve resmi ispatlar yazmak onlar için iş bulmanın ve kariyer inşa etmenin tek yolu haline geldikçe büyüyen bir anlayış halini almıştır. 1930'larda güçlü, gizli bir matematikçi grubunun Nicolas Bourbaki takma adı altında ortak çalışmalar yayınlamaya başlamasıyla daha da güçlenmiştir. Onların ahlak anlayışı matematiksel düşünceye egemen olmaya başladığı sırada, disiplini temellerinden sıyırıp mümkün olduğunca biçimsel hale getirmeyi amaçlamışlardı. Bourbaki olarak bilinen gizli matematik topluluğu, 20. yüzyıl ortası matematiğinin çoğunu etkiledi. Soyutlama ve titizliğe yaptığı vurgunun etkileri bugün de hissedilmeye devam ediyor.

Bourbaki olarak bilinen gizli matematik topluluğu,

Nicolas Bourbaki, ancak bundan çok önce, matematikçiler tıpkı fizikçiler, biyologlar veya kimyagerler gibi yeni fenomenleri keşfetmek ve kanıtlamak için deneylere güvendiler. Tahminlerde bulundular, hipotezleri bir kenara attılar, deneme yanılma yoluyla kalıplar aradılar. Hesaplamalar yaptılar, gözlemler yaptılar, veri topladılar. Benzerlikleri, beklenmedik yerlerde ortaya çıkan belirli sayıları veya dizileri not ettiler.

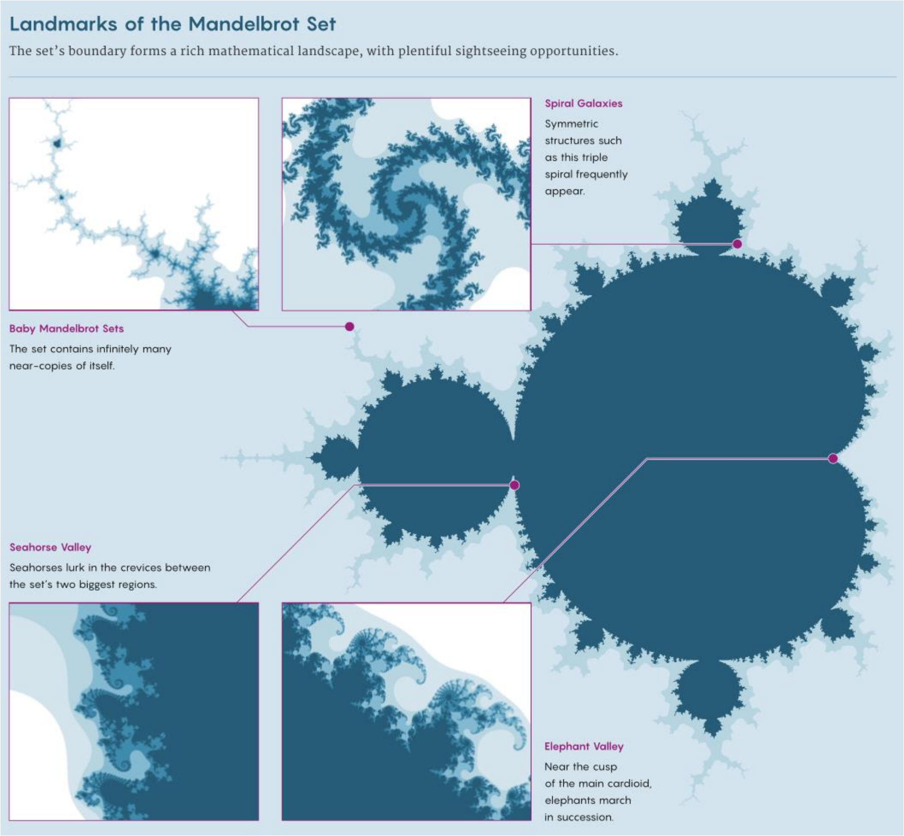
18. ve 19. yüzyıl matematiğinin devleri Euler, Gauss, Riemann hepsi elle zahmetli bir şekilde yapılan büyük miktarda hesaplamaya güvenen deneycilerdi. Gauss, asal sayı teoremini, asal sayıların tam sayılar arasında nasıl dağıtıldığını tanımlayan önemli bir formülü, ispatlanmasından bir asır önce varsaydı. Bunun nedeni, gençliğinde asal sayılar tablosunu incelemiş ve bin sayıdan oluşan bloklar halinde, bir milyona kadar, kaç tane asal sayı olduğunu saymaya karar vermiş olmasıdır. Şüphesiz Gauss günümüz bilgisayarlarına minnettar olurdu. Benzer şekilde, Riemann, matematikteki en büyük açık problem olan kendi adını taşıyan hipotezini, ancak sayfalarca hesaplama yaptıktan sonra ortaya koydu. Matematiksel veya başka türlü tüm düşünceler, etrafımızdaki dünyadan, zamanımızın teknolojilerinden, felsefi hareketlerinden ve estetiğinden etkilenir. Bu bağlamda, Bourbaki'nin felsefesi tam titizlik gereksinimi ve somut örnekler yerine genel ifadelere vurgu yapması bir tür sapmayı temsil ediyordu. Matematikçilerin Bourbaki'ye bakış açısı bölünmüştür. Bazıları, belirli alanlara çok ihtiyaç duyulan titizliğe doğru bir ivme kazandırdığını iddia ediyor. Diğerleri ise bunun kısıtlayıcı, dar görüşlü olduğunu, matematiği diğer ilham kaynaklarından uzaklaştırdığını söylüyor.

1970'lerden beri, matematikçilere deney yapma ve oynama konusunda tamamen yeni yollar sunan modern bilgisayarlar tarafından itilen sarkaç geri sallanmaya başladı. Eilers, "sanırım insanlar Bourbaki olayının bir tür hata olduğu konusunda genel olarak hemfikir" dedi. "Bu çok soyut görüş, bu pek de insan dostu değil, bu alan bu şekilde evrimleşmemeli" diyerek ifadesini sürdürdü. Gauss ve Riemann'ın deneysel ruhuna uygun olarak, matematikçiler günümüzün en ünlü açık problemlerinden birini ortaya attılar. Birch ve Swinnerton, Dyer varsayımı, çözüldüğünde bir milyon dolarlık ödül getiren eliptik eğrilerle ilgili bir soru ancak bir bilgisayar kullanarak dağlarca veri ürettikten sonra çözülebilen bir problemdi.

Lyubich, günümüzde Stony Brook Matematik Bilimleri Enstitüsü'nün müdürüdür.

Matematikçiler hem yerleşik varsayımlara hem de yeni hipotezlere karşı örnekler bulmak için bilgisayarları kullandılar. Bunları eski kanıtlardaki hataları bulmak ve düzeltmek için kullandılar. Farklı alanlar arasında yeni bağlantılar kurmak için bilgisayarlara yöneldiler. Ve birçok alanda, matematikçiler temel hesaplamaları yapmak ve matematiksel argümanın kendisinde diğer adımları gerçekleştirmek için bilgisayarlara güvenmeye başladılar. Mandelbrot kümesi durumunda, bilgisayarlar tüm bir alanı başlatmaya yardımcı oldu. Matematikçilerin anlattığına göre, bilgisayarlar Mandelbrot kümesini bir şehir gibi ele almalarına izin verdi. Keşfedilecek fiziksel bir alan olarak ortaya çıktı. Mahallelerinde ve sokaklarında dolaşarak saatler, günler, yıllar geçirdiler, kayboldular, araziye aşina oldular. Brezilya'daki Ulusal Saf ve Uygulamalı Matematik Enstitüsü'nden Luna Lomonaco, "daha fazla ve daha fazla şey anlamaya başlıyorsunuz ve her geri döndüğünüzde, eve geri dönmek gibi oluyor" dedi. "Gerçekten sizin bir parçanız oluyor" diye görüşünü sürdürdü.

Bu aşinalık, alandaki matematikçilerle konuştuğunuzda her zaman açıktır. Farklı bilgisayar programlarında kolayca gezinir, farklı özellikleri göstermek için belirli noktalara yakınlaştırırlar. Dudko bu görüntüleri "kompleks dinamiklerdeki bir dil gibi" olarak tanımlıyor. Buff, "kümenin küçük bir kopyasının görünür hale gelmeden önce tam olarak nerede belireceği, sadece belirli dalların ve kıvrımların nasıl göründüğüne dayanarak tahmin edebilir" diye açıklama getirdi. Chéritat'dan bir keresinde, herhangi bir ek bilgi olmadan, Mandelbrot kümesinin derinliklerindeki bir bölgenin onlarca yıllık bir posterini yeniden üretmesi istendi ve bunu yaptı. Douady görünüşe göre bir Julia kümesine bakıp Mandelbrot kümesindeki c'nin hangi değerinden geldiğini bilebilirdi. Hubbard hala Julia kümelerinden eski dostlar olarak bahsediyor. Mandelbrot kümesini incelemek gerçekten deneysel bir matematik alanı gibi hissettiriyor.



Kapiamba, "pure bir matematik alanının aksine, neredeyse uygulanmış bir matematik alanı gibi hissettiriyor" diye ifade etti. Buff, "sadece orada olan bir şeyi alıp, bana göre keşfetmeye çalıştığınız doğal bir fenomen gibi hissettiren bir şekilde onu parçalara ayırmaya ve analiz etmeye çalışıyorsunuz. Bu sizin yarattığınız bir şey değil. Orada olan ve sizin keşfettiğiniz bir şey" diye ekledi. "Bilgisayarımda açıkça orada, Mandelbrot kümesini ziyaret ediyorum. Ve belki de Mandelbrot kümesinde henüz keşfetmediğim bazı yerler vardır."

Bu çalışma alanı bu tür keşiflerle doludur. Kümenin kendi içinde daha küçük kopyalarının ve antenlerinin, kıllarının ve diğer süslemelerinin görünme biçimindeki belirli desenlerin keşfi vardı. Kümede kodlanmış Fibonacci dizisinin keşfi vardı. Ayrıca, Pi sayısının da bir yaklaşımını içeriyor. Mandelbrot kümelerinin tamamen başka bağlamlarda keşfi var, örneğin kübik denklemlerin sayısal çözümlerinin aranması gibi, hala bu konu tam olarak anlaşılmış değildir.

Indiana Üniversitesi Bloomington'dan Kevin Pilgrim, "bilgisayarlar bize baştan çıkarıcı, gelip açıklamasını isteyen şeyler gösteriyor" dedi. Burada aslında cevaplar olmasa da doğru soruları sormamızı sağlıyor. Bilgisayarlar Mandelbrot kümesinin tüm bu küçük kopyalarını kendi içinde ortaya çıkardığında, Douady ve Hubbard bunların varlığını açıklamak istedi. Sonunda, fizikçilerin kuantum alan teorileri çalışmasında sonsuzlukları evcilleştirmek ve faz geçişleri çalışmasında farklı ölçekleri birbirine bağlamak için kullandıkları bir teknik olan yeniden normalleşme(renormalizasyon) teorisine yöneldiler. Daha önce matematikçiler için pek ilgi çekici olmamıştı; onların standartlarına göre, titiz bile değildi. Ancak 1970'lerde fizikçi Mitchell Feigenbaum, renormalizasyon teorisini dinamik dünyasına getirdi ve bunu, gerçek sayılar kullanarak ikinci dereceden denklemleri yinelediğinizde ortaya çıkan belirli bir öz-benzer modeli açıklamanın bir yolu olarak kullandı. Douady ve Hubbard, renormalizasyonun bilgisayar ekranlarında gördükleri daha karmaşık öz-benzer modelleri açıklamak için tam olarak ihtiyaç duydukları şey olduğunu fark ettiler. Ve böylece renormalizasyon teorisini karmaşık dinamiklere nasıl uygulayacaklarını buldular.

O zamandan beri, Lyubich ve meslektaşlarının MLC üzerindeki çalışmaları bu teoriyi herkesin mümkün olduğunu düşündüğünden daha da ileriye taşıdı.

HER NOKTAİÇİN BİR İSİM

Lyubich, Moskova'dan ayrıldıktan aylar sonra Şubat 1990'da New York'a vardığında, Douady'nin e-postasında heyecanla yazdığı çalışma hakkında daha fazla bilgi edinme şansı yakaladı. İlk başta Lyubich'i büyüleyen şey MLC sonucu değildi, Yoccoz'un bunu kanıtlamak için geliştirdiği tekniklerdi. "Bir şekilde, bu benim için çok iyi bir şeydi" dedi. Gerçek dinamiklerle ve Feigenbaum'un yeniden normalleştirme üzerine çalışmasına dayanarak ortaya çıkan soruları yanıtlamakla ilgileniyordu. 1990'ların çoğunda Lyubich, Yoccoz'un yöntemlerini daha da geliştirmeye ve bu açık sorunları ele almaya odaklandı. On yılın sonunda, "bu makineyi kullanarak, dinamiklerin gerçek hat üzerindeki tam tanımını esasen elde ettiğini" hissetti. Bu çalışmanın doğal bir sonucu olarak Lyubich, Yoccoz'un sonucunun kapsamadığı birçok vaka için, ancak hepsi için değil, MLC'yi ispatladı. Yoccoz'un ispatı, Mandelbrot kümesindeki "sonsuz yeniden normalleştirilebilir" parametreler olarak bilinenler hariç tüm noktalar için MLC'yi gösterdi. Bu noktalar sonsuz şekilde iç içe geçmiş bebek Mandelbrot kopyalarının içinde yaşıyordu. Sonucu MLC'yi anında yeniden normalleştirme teorisiyle yakından bağlantılı bir soruna dönüştürdü. Bu bağlantı heyecan vericiydi. Yüzeyde MLC alanın tamamen farklı bir köşesine ait gibi görünüyordu. Lyubich, "yeniden normalleştirme teorisi tamamen bağımsız olarak gelişmişti" dedi. "Ve sonra her şey aynı hikayenin parçası oldu". Ve böylece Lyubich, MLC sorununu ele almaya da ilgi duymaya başladı.

Yeniden normalleştirme tartışmaya girmeden önce bile, MLC'nin daha derin yankıları olan bir soru olduğuna dair işaretler vardı. Orsay notlarında, Douady ve

Hubbard, MLC doğruysa, bunun Mandelbrot kümesinin iç kısmının özellikleri için de çıkarımları olduğunu gösterdi. Kümenin içindeki her nokta aynı şekilde davranmaz. Ana kardiyoiddeki noktalar, sıfır başlangıç değerinden itibaren yinelendiğinde tek bir sayıya yakınsayan fonksiyonlara karşılık gelir. Diğer loblardaki noktalar, belirli sayıda farklı değer arasında salınım yapan fonksiyonlara karşılık gelir. Örneğin, ana kardiyoidin üstündeki en büyük lob, üç değer arasında salınım yapan fonksiyonları temsil eder. Ancak, dikkatlice seçilmiş noktalar için, bir fonksiyon sınırlı kalan ancak asla salınım yapmayan diziler üretebilir; yeni, farklı değerler arasında atlamaya devam ederler. Ancak MLC doğruysa, Douady ve Hubbard bu salınımsız dizilerin nadir olması gerektiğini gösterdiler. Matematikçilerin çalıştıkları herhangi bir dinamik sistem için ispatlamak veya çürütmek istedikleri "hiperbolikliğin yoğunluğu" adı verilen bir özelliktir. Lomonaco'ya göre, bu sadece karmaşık dinamiklerde değil, temel olarak dinamiklerdeki en önemli sorudur. Hiperbolikliğin yoğunluğu Mandelbrot kümesinin iç kısmıyla ilgilidir. Ancak MLC, matematikçilerin kümenin sınırındaki her noktaya bir adres atamasını da sağlayacaktır. Hubbard, "her noktaya bir isim verir ve sonra, Mandelbrot kümesinin sınırındaki her noktayı adlandırabildiğinizde, onu gerçekten tamamen anlamayı umabilirsiniz" diye açıkladı. Bu şekilde, MLC matematikçilere kümenin resminin hiçbir şeyi eksik olmadığını söyler. Ancak bir ispat olmadan, bu sonsuz derecede karmaşık manzaranın en derin köşelerinde saklı, henüz bilgisayar ekranlarında görünmemiş, temelde farklı bir şekilde davranan bazı bölgeler hala olabilir. Bu, matematikçilerin hikayenin bir kısmını hala kaçırdığı anlamına gelir.

BASİT ŞEYLER HAKKINDA DERİNLEMESİNE DÜŞÜN

Jeremy Kahn, 1970'lerde New York'ta bir sosyal hizmet görevlisi ve bir bilim yazarının oğlu olarak büyüdü. Çocukken, kısa sürede bir matematik dehası olduğunu ispatladı. Altıncı sınıfta SAT'ın matematik bölümünden 790 aldı. Ve çeşitli matematiksel kavramları daha derinlemesine incelemek için kendi bilgisayar programlarını yazdı. O yıllarda 13 yaşındayken, ABD'nin Uluslararası Matematik Olimpiyatı takımında yer alan en genç katılımcı oldu. Lise boyunca yarışmaya katıldı ve iki gümüş madalya ve iki altın madalya kazandı. Bu süre zarfında, Columbia Üniversitesi'nde matematik dersleri almaya başladı ve yatak odasında tuttuğu bir kara tahtada birkaç teoremi (ispatlandıklarını bilmeden) tekrar ispatladı. Liseden mezun olduktan sonra, ana dal olarak matematik okumak için Harvard Üniversitesi'ne gitti. Orada Mandelbrot kümesine hayran kaldı. Son yılında, tüm enerjisini bunu anlamaya adadı. O zamanlar Harvard'da kimse bu konu üzerinde çalışmadığı için, fraktallar ve dinamik sistemler hakkında bir matematikçiden ders almak için Boston Üniversitesi'ne bisikletle giderdi. Mezun olduktan ve Kaliforniya Üniversitesi, Berkeley'de bir doktora programına kaydolduktan sonra, Mandelbrot kümesi ilk popüler olmaya başladığında, matematikçilerin daha önce kompleks dinamiklerle ilişkilendirdiği bir alan olan hiperbolik geometriye odaklandı.

Kahn bu bağlantıyı güçlendirmek istiyordu. Lisansüstü öğrencisiyken, matematikçiler Dennis Sullivan ve Curt McMullen tarafından yapılan öncü çalışmalara dayanarak Yoccoz'un ünlü MLC sonucunu yeniden kanıtladı. Ayrıca hiperbolik geometriden gelen fikirlerin renormalizasyona nasıl uygulanacağını düşünmeye başladı.

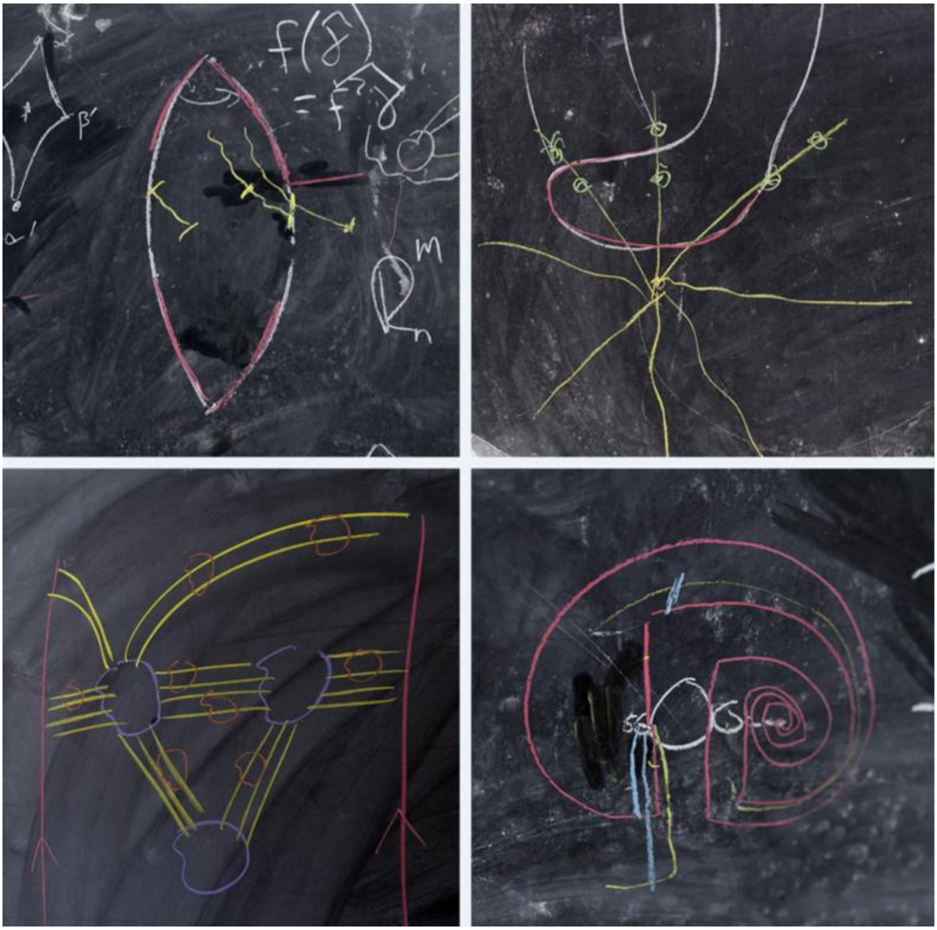
Kahn'ın sınıf arkadaşı Kevin Pilgrim, Kahn'ın eğrilerin ve halkaların, bozulan ve çarpıtılan geometrik nesnelerin çizimleriyle büyük sayfalar doldurduğunu gördüğünü hatırlıyor. Pilgrim, bu şeyler hakkında çok derin şekilde nerdeyse 15 yıl boyunca düşünmeye başladığını ifade etti. "Jeremy'nin bir şey hakkında gerçekten çok düşünme konusundaki azmi oldukça şaşırtıcı," diye ekledi. Jeremy Kahn henüz 13 yaşındayken olağanüstü bir matematik yeteneği sergiliyordu.

Kahn, renormalizasyon hakkında özellikle çok düşündü. Lyubich'in, Douady ve Hubbard'ın çalışmalarını inceledi.

Tüm bu bağlamlarda, renormalizasyon, dinamik bir sistemin farklı ölçeklerini birbirine ilişkilendirmenin bir yoludur. Bir ikinci dereceden denklemin dinamiklerini düşünün. Noktalar karmaşık düzlemde belirli şekillerde zıplayacaktır. Renormalizasyon, tüm bu noktaların dinamiklerini yalnızca küçük bir alt kümesine odaklanarak tanımlamanıza olanak tanır. Fransa'daki Sorbonne Üniversitesi'nden Romain Dujardin, "Renormalizasyon, en derin seviyede yatan yapıları anlamanıza olanak tanıyan süper güçlü bir mikroskop gibi davranır" dedi. Bunu ne ölçüde yapabileceğiniz, yinelediğiniz denkleme bağlıdır. Bazen dinamiklerini sistemin daha küçük bir parçası açısından tanımlayamazsınız. Ya da daha küçük ölçekler hakkında artık anlamlı bir şey söyleyemeyeceğiniz bir noktaya ulaşmadan önce, şeyleri bir, iki veya 10 kez büyütmek için renormalizasyon mikroskobunu kullanabilirsiniz. Ancak sonsuz şekilde yeniden normalleştirilebilir parametrelerle ilişkili işlevler için, renormalizasyonu sonsuza kadar uygulamaya devam etmek mümkündür. Bu hassas bir işlemdir. Lyubich, bu işlemin rastgele bir şekilde yapılamayacağını ifade etti. Çok fazla hassasiyet kaybetmeden bir ölçekten diğerine geçebileceğinizi titizlikle göstermelisiniz. Bunu başarmanın ilk adımı, farklı ölçeklerin geometrisi üzerinde kabaca bir tür kontrol elde etmeyi içerir. Bu adım, daha sonra Mandelbrot kümesinde c'nin belirli bir değeri için MLC'yi göstermek için kullanılabilir.

Kahn, lisansüstü öğrencisiyken hiperbolik geometri bilgisini soruna nasıl uygulayacağını düşünüyordu. Araştırması dikkat çekti ve lisansüstü okulunun üçüncü yılında, California Teknoloji Enstitüsü'nde kadrolu bir işi kabul etti. Her şey mükemmel bir şekilde sıralanıyor gibiydi. Ve sonra şaşkınlıktan donup kaldı. Lisansüstü okulundaki zamanından sonuçları vardı ama her seferinde bir bilgisayara oturduğunda, sahip olduğu iradeyi kaybediyordu. Matematiksel dikkatini de odaklayamıyordu. Bazen MLC veya P ile NP gibi gerçekten harika teoremleri ispatlama isteğinin aşırılıklarında kendimi kaybediyordum diye itirafta bulundu. Kahn, Caltech'te geçirdiği dört yıl boyunca tek bir makale bile yazmadı. İşini kaybetti. Ve böylece, 1998 sonbaharında, 30 yaşına yakınken, bir zamanlar umut vadeden kariyeri paramparça olmuşken, New York'a geri döndü. Milnor'ı arayıp tavsiye istedi. Milnor, Kahn'ı lisansüstü okulda birkaç kez tanıştığı Lyubich ile tekrar iletişime geçirdi. Lyubich, Kahn için Stony Brook'ta öğretim görevi olmadan geçici bir pozisyon buldu ve Kahn'ı mümkün olduğunca desteklemeye devam etti. Kahn bu yıllarda hala kendini sık sık kaybolmuş hissetse de, o ve Lyubich, Kahn'ın oldukça yoğun bir iş birliği ile MLC de bir çok şeyi geliştirdiler. Bu onu ayakları yere basan biri yaptı. İki matematikçi, yeniden normalleştirmeye yönelik yaklaşımlarını birleştirdi ve bu da onların çok daha fazla parametre için MLC'yi kanıtlamalarına olanak sağladı. Kahn ve Lyubich'in çalışmaları, yeniden normalleştirme teorisinde ve MLC'de büyük bir atılımı simgeliyordu. Ancak Lyubich, Mandelbrot kümesi son derece sinsi, ifadesini kullandı, çünkü tam olarak kendi kendine benzer değil ve farklı türde kendi kendine benzerlikler sergiliyor. Avila'nın da dediği gibi, içinde hareket ettikçe farklı kişiliklere sahip bir küme. Bu farklı türdeki kendi kendine benzerlikler çok farklı dinamiklere karşılık gelir ve bu nedenle bir ölçeği diğerine ilişkilendirmek için farklı türde yeniden normalleştirmeler gerektirir.

Kahn ve Lyubich bir tür geliştirmişlerdi, ancak tekniklerini olabildiğince zorlamışlardı. Mukherjee'nin ifadesine göre Kahn ve Lyubich bir duvara çarptılar ve bir duvara çarpacaklarını biliyorlardı. Mandelbrot kümesinin diğer bölümleri için MLC'yi ispatlamak, benzer bir tür geometrik kontrol elde etmeleri, ancak başka bir tür veya türlerde yeniden normalleştirme kullanmaları gerekecekti. Sonunda Kahn ve Lyubich, en iyi şekilde nasıl ilerleyecekleri konusunda anlaşamadılar. İlerleme durdu. Her biri diğer problemler üzerinde çalışmaya başladı. Kahn hiperbolik geometriye geri döndü. Lyubich, MLC çalışmasını karmaşık dinamiklerin diğer bölümlerine (ve hatta fizikteki sorulara) uygulayabileceği yollar düşündü.



Bu çizimler, fizikte ortaya çıkan ve o zamandan beri titiz bir matematiksel teoriye dönüşen bir teknik olan renormalizasyonu içeren hesaplamaları göstermektedir. Renormalizasyon, karmaşık dinamiklerde merkezi bir rol oynar ve geniş kapsamlı uygulamalara sahiptir.

2004 yılında Stony Brook Matematik Bilimleri Enstitüsü'nün müdürü olan Lyubich, yarın biri tüm durumlarda MLC'nin tek satırlık bir kanıtını bulursa, daha önce yaptığımız her şeyi yok eder mi? Diye sorsada cevap belliydi, hayır. Çünkü bu tekniğe dayanan çok sayıda problem var. Bu, MLC cephesinde işler pek de yolunda gitmiyormuş gibi göründüğünde asla hayal kırıklığına uğranmamasının nedenlerinden biridir. MLC'deki her adım, birçok başka soruna açılan bir kapıdır. Bu arada, Kahn hiperbolik geometride önemli ilerlemeler kaydetti. Kadro teklifleri gelmeye başladı. Ne Lyubich ne de Kahn, MLC hakkında düşünmeyi bırakmadı, ancak kendi sorumluluklarıyla meşgul olarak birbirlerinden uzaklaştılar. Kompleks dinamikler üzerinde çalışan diğer matematikçiler farklı yönlere doğru hareket etmeye başladı. Mandelbrot kümesinden bile daha karmaşık parametre uzaylarına ve kompleks dinamikler ile sayılar teorisi arasındaki bağlantıya odaklandılar. Ancak son yıllarda, Lyubich ve Kahn asistanlar aldılar ve MLC'yi kanıtlamak için çabalarını yenilediler.

KARŞI KARŞIYA GELMEK

Yaklaşık on yıl önce, Lyubich Dima Dudko ile çalışmaya başladı. Dudko, 1980'lerde Belarus'ta büyüdü ve matematiksel becerisi etrafındakiler tarafından hemen fark edildi. Kahn yaşlandıktan 15 yıl sonra Belarus'u Uluslararası Matematik Olimpiyatları'nda temsil etti. Kahn gibi o da altın madalya kazandı. Daha sonra, Almanya'da lisansüstü öğrencisiyken, danışmanı Lyubich'e Dudko'nun tezi için hangi problem üzerinde çalışması gerektiği konusunda danıştı. Dudko'nun cevaplayabileceğini beklemedikleri Mandelbrot kümesiyle ilgili bir soru üzerinde karar kıldılar. Açıklama MLC'den otomatik olarak gelecekti. MLC'nin ona yardım etmemesi durumunda en iyi ihtimalle kısmi ilerleme kaydedebileceğini düşündüler. Dudko, MLC'nin etrafından dolaşmanın bir yolunu buldu ve problemi tamamen çözdü.

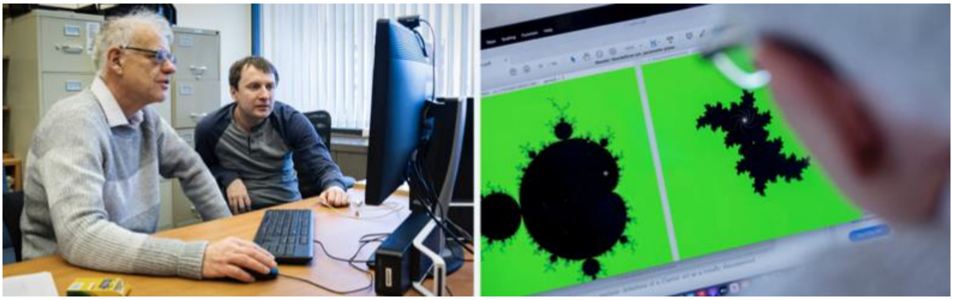
Ukraynalı Lyubich ile Belaruslu Dudko, sık sık birlikte çalıştıkları iş birliklerinde genellikle Rusça konuşuyorlar.

Quanta dergisi için Karen Dias 2012'de lisansüstü programını tamamladıktan sonra, doktora sonrası araştırmacı olarak Almanya'da çalışmaya devam etti ve Lyubich ile de iş birliği yapmaya başladı. Alabama Üniversitesi, Birmingham'dan üçüncü bir matematikçi olan Nikita Selinger ile yeni bir yeniden normalleştirme teorisi geliştirdiler. Lyubich ve Dudko daha sonra bunu, MLC'nin Mandelbrot kümesindeki en zor sonsuz yeniden normalleştirilebilir parametrelerden bazıları için geçerli olduğunu göstermek tam da Lyubich ve Kahn'ın yöntemlerinin uygulanamadığı parametreler için kullandılar. Lyubich'in eski öğrencisi Davoud Cheraghi ve Kyoto Üniversitesi'nden Mitsuhiro Shishikura da bu olağanüstü vakalardan bazılarını ele almak için teknikler geliştirirken Lyubich, bu vaka o kadar farklı ki, birkaç on yıl daha süreceğini anladı. Ayrıca biraz da özgün düşünce gerektiriyordu. Danimarka'da Lyubich ile birlikte yakın zamanda MLC seminerine liderlik eden Dudko, bölgede bir yıldız olarak görülüyor ve şeylere bakmanın ilgi çekici bir yolu var. Bu belki de en iyi, çoğu matematikçinin çizme eğiliminde olduğu daireler yerine, bazen Mandelbrot kümesini bir dizi kare olarak çizmesiyle örneklenebilir. Bu sorunları çözmenin mümkün olması Lyubich'i şaşırtmıştı. Son zamanlarda yapılanlar daha önce yapılan her şeyin ötesinde olduğu farkedilince, Lyubich, tüm bu sonuçları tek bir yerde bir araya getirme çabasıyla, Mandelbrot kümesi, MLC ve kompleks dinamiklerdeki ilgili çalışmalar hakkında bir dizi ders kitabı yazdı. Şimdiye kadar, planlanan dört ciltten ikisine bölünmüş 700'den fazla sayfa üretti. Umulan odur ki 4. cildi bitirdiğinde, MLC orada olur.

Lyubich gibi, Kahn da daha genç bir asistan buldu. Alex Kapiamba'yı işe alma fikri ilk olarak Kahn'a bir rüyasında geldi. 2022'de bir konferanstaydı. Birkaç ay boyunca, Lyubich ve Dudko, MLC'deki ilerlemeyi tartışmak için düzenli olarak bir araya geldiler. Sonraki günlerde araştırmasını görüşmek üzere Kapiamba ile buluşmayı ayarladı. MLC çabasına ne kadar katkıda bulunabileceğini düşündüğü konusunda mütevazıydı. Çok geç olmadan içeri girip biraz bir şeyler yapma isteğini belirtti. 2014'te mezun olduktan sonra ne yapmak istediğinden emin değildi. Yüksek lisans öğrencisi olarak, sığ bir vadiden bir fil geçidinin yürüdüğü ana kardiyoidinin zirvesine yakın bir yerde Mandelbrot setinin geometrisi hakkında bir soru üzerinde çalışmaya başladı. Vadiye yaklaştığınızda, filler birbirine giderek daha da yaklaşıyor gibi görünüyor. Ve bu nedenle vadinin en derin noktasına yaklaştığınızda, filler arasındaki mesafenin sıfıra düşeceği varsayılıyor. Kapiamba, bilgisayar ekranında, fillerin üzerinde yakınlaştırdığı yerde gerçekten de birbirlerine değiyormuş gibi görünüyorlardı. Argümanının önemli bir kısmı eski bir doktora tezinde yapılan bir laftan ibaretti. Tamamen Fransızca yazılmış 73 sayfalık tez 1989'da tamamlandı ancak hiçbir zaman yayımlanmadı. Yazarı, çözmeyi umduğu sorun olan MLC yüzünden hayal kırıklığına uğrayıp sinirlendikten sonra, sadece bir yıl sonra matematiği bırakmıştı.

Şu anda Brown Üniversitesi'nde doktora sonrası araştırmacı olarak çalışan Alex Kapiamba, Mandelbrot kümesinin sağ tarafındaki bir vadiye yaklaştığımızda yürüyen fillerin rastgele birbirine yaklaştığını gösterdi.

Sonunda, Kapiamba tezin mantığındaki bir adımı kavrayamadığını fark etti. Yazarı bir hata yapmıştı. İddiası büyük ihtimalle doğruydu, ancak bunun ardındaki mantık geçerli değildi. Ve böylece Kapiamba hatayı düzeltmeye odaklandı. Ekmeğin mayalanmasını beklediği gibi, her şeyi kendi haline bıraktı. Hala zihnini odaklamak için pişiriyor. Elleriyle bir şeyler yapma fırsatını yakalamanın tadını çıkarıyor. Sonraki birkaç yıl içinde nihayet kanıtı buldu. Bunu yapmak için Yoccoz'un orijinal MLC kanıtında kullandığı, fillerin büyüklüğündeki bir teoremi güçlendirmesi gerekiyordu. Çalışma kompleks dinamik topluluğunu tamamen şaşırttı. Bilgisayar görüntüleri Mandelbrot kümesinin belirli bölgelerinin Yoccoz'un teoreminin önerdiğinden çok daha hızlı küçüldüğünü göstermişti, bu da ifadesinin güçlendirilebileceği anlamına geliyordu. Kapiamba, sadece birkaç resim çizip onlara bakarsanız, Yoccoz'un bize verdiği sınırın çok kötü göründüğünün görülebileceğini gösterdi. Ancak Kapiamba'ya kadar kimse bunu geliştirememişti. Çalışması yalnızca Mandelbrot kümesindeki belirli bölgelere uygulanıyordu. Matematikçiler Yoccoz'un ifadesinin daha güçlü versiyonunun tüm küme için gösterilebileceğini umuyorlar. Buna rağmen, insanlar gerçekten heyecanlandı. Bunun üzerinde çalışan herkes bunun doğru olması gerektiğini biliyor ancak sadece bunu nasıl ispatlayacaklarını bilmiyorlardı. Lomonaco ve diğer matematikçiler, Kapiamba'nın sonucunu kendi teoremlerini kanıtlamak için kullandılar. Ancak bu aynı zamanda MLC'nin gelecekteki bir ispatı için potansiyel bir temel olarak görülüyor.



Mandelbrot kümesinin hikayesi, bilgisayarların nasıl keşfedilmeye hazır, tamamen yeni matematiksel ufuklar açabileceğini gösteriyor.

SONUÇ

Mandelbrot kümesinin son yarım yüzyıllık keşfi, bilgisayar grafiklerinin geliştirilmesiyle mümkün oldu. Fraktalı oluşturan matematik basittir. Gerçekten sadece toplama ve çarpmayı bilmeniz yeterlidir. Ancak kümeyi ünlü yapan çizimler elle yapılmış olamazdı. Bu kolay hesaplamaları milyonlarca kez yapmak gerekirdi. Bu da bilgisayarlar olmadan mümkün olmayan bir şeydi. Prensip olarak, vizyon sahibi bir matematikçi yüzlerce yıl önce zihninde kümenin bir anlık görüntüsünü tutmuş olabilir. Ancak tarihin gelişiminde, deha bazen ufuktan bakabilse de teknoloji hayal edilebilecek şeyleri modüle etti. Örneğin, Fatou, Mandelbrot kümesini göremeden varsayımlar formüle edebildi. Fakat Fatou yalnızca bu kadar ileri gidebildi. Hayal gücü ne kadar güçlü olursa olsun, Mandelbrot kümesinin altında onun erişemediği ancak bugün ortalama bir insanın kolayca görebildiği bir zenginlik dünyası dönüyordu. Lyubich, düşünme biçimi çok görsel ve geometrik olduğundan çalışmalarında bilgisayar kullanma eğiliminde değil. Resimlerle düşünüyor ama sadece elle veya zihninde az çok ilkel resimler çiziyor. Yine de hesaplamalarla dolu bir dünyada yaşıyor. Lyubich , Özbekistan'ın pamuk tarlalarına döndüğünde, o da hayal gücünü serbest bırakarak ancak belli bir yere kadar gelebildi. Bir sonraki derinlik seviyesini görenler Douady ve Hubbard'dı.1980'lerde mevcut olan bilgisayarları kullandılar. O zamandan bu yana geçen yıllarda Lyubich, işbirlikçilerinin bilgisayarları bir laboratuvar ve rehber olarak kullandığını gördü. Milnor ile ortak bir makalede, Milnor'un ispatlarını doğru yöne yönlendirmek için birkaç bilgisayar deneyi yaptığını hatırlıyor. Dudko, Lyubich ile çalışırken tekrar tekrar bilgisayara geri dönüyor.

Galileo, Jüpiter'in uydularını yalnızca gördüklerini anlamlandırmak için doğru teoriyi geliştirdiği için değil, aynı zamanda bir teleskopu olduğu için keşfetti. Benzer şekilde, teknolojik değişim onları görünür hale getirene kadar gizli kalan matematiksel evrenin tüm bölümleri vardır. Bunlar, Jüpiter'in uydularının gözleri kısarak ayırt edilemediği gibi, saf düşünceyle keşfedilemez. 1970'ler ve 80'lerdeki hesaplama devrimi Mandelbrot kümesini keşfe açtıysa da matematikçiler bugün başka bir dönüm noktasının eşiğinde olabilirler. Yapay zeka, önemli varsayımlar formüle etmek ve önemli matematiksel sonuçları ispatlamak için yeni yeni kullanılmaya başlıyor. Potansiyelini güvenle ölçmek zor, belki de imkansız. Kapiamba şaka yollu şöyle diyor "Mandelbrot kümesinin etrafında hızla hareket edecek bir sinir ağını eğitmeye çalışmalıyız. Fakat Mandelbrot kümesinin hikayesi, matematikçilerin teknoloji tarafından açılan bir manzarayı incelemek için saf düşünceyi nasıl kullanabileceklerinin hikayesiyse, bir sonraki bölüm henüz yazılmadı.

Mandelbrot bir keresinde "hayal gücümün tüm bu olağanüstü şeyleri icat edecek kadar zengin olduğunu hiç hissetmedim" demişti; "daha önce hiç kimse görmemiş olmasına rağmen oradaydılar".

Mandelbrot kümesinde keşfedilmeyi bekleyen sayılamayacak kadar çok karmaşık hareketin bulunduğunu bilmek, matematikçiler kadar konuya ilgi duyanları da bu gizemi düşünmeye sevk ediyor.

KAYNAKÇA

1. AIP Emilio Segrè Görsel Arşivleri/ Physics Today Koleksiyonu.
2. ÇİLİNGİR, F., Doğa Bilimleri ve Matematikte Güncel Yaklaşımlar, “Kaosun Geometrisi”, Duvar Yayınları (2023).
3. ÇİLİNGİR, F., Fen Bilimleri Matematik, “Mandelbrot Kümesinin Geometrisi”, Platanus Yayınları (2024).
4. Devaney, R. [1992] ”A First Course In Chaotic Dynamical Systems ”. Perseus Books Pub.,L.L.C.
5. Douady Hubbard https://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf
6. Fatou, P.[1917] Sur les substitutions rationnelles, Comptes Rendus de I’Acad´emie desSciences de Paris, 164, P.806 − 808 and 165, P.992 − 995.
7. George M. Bergman (Douady)/Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
8. https:/abel.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf
9. Julia, G. [1918] ”Memoire Sur l’it´eration des functions rationelles”, J.math.pures etapl.8,47-245.See also Oeuvres de Gaston Julia, Gauthier-Villars,Paris 1, pp.121- 319.
10. Milnor, J. [1999] ”Dynamics in One Complex Variable”, Vieweg.
11. Devaney, R. [1992] ”A First Course In Chaotic Dynamical Systems ”. Perseus Books Pub.,L.L.C.

4. Bölüm

Biyoaktif Mikrobiyal Pigmentler

Meryem DOYMUŞ[1]
Nazlı Pınar ARSLAN[2]
Mesut TAŞKIN[3]

[1,*] Öğr. Gör. Dr. Atatürk Üniversitesi, Hınıs Meslek Yüksekokulu, Tıbbi Hizmetler ve Teknikleri Bölümü, Erzurum, Türkiye,
e-mail: meryem.doymus@atauni.edu.tr Orcid: 0000-0002-3184-1422 (sorumlu yazar)
[2] Doç. Dr., Bingöl Üniversitesi, Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu, Tıbbi Hizmetler ve Teknikleri Bölümü, Bingöl, Türkiye, e-mail: nparslan@bingol.edu.tr Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3951-4418
[3] Prof. Dr. Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Moleküler Biyoloji ve Genetik Bölümü, Erzurum, Türkiye,
e-mail: mesut.taskin@atauni.edu.tr Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9350-9628

1.GİRİŞ

Doğal pigmentler sarı, kırmızı, yeşil, turuncu, mavi, kahverengi ve siyah gibi renklere sahip olabilen ve doğada çeşitli bitki, hayvan, alg ve mikroorganizma grupları tarafından sentezlenen organik bileşiklerdir. Bu bileşikler gıda endüstrisi başta olmak üzere çeşitli endüstrilerde sentetik pigmentlere alternatif olarak kullanılmaktadır. Mikrobiyal pigmentlerin üretimi sıvı veya katı kültürlerde gerçekleştirilmektedir. Pigment üretimini artırmak içinse pH, sıcaklık, azot ve karbon kaynakları, inkübasyon süresi gibi kültür parametrelerinin optimizasyonu gerçekleştirilmektedir. Mikrobiyal pigmentler hücre içi veya hücre dışı formda sentezlenmektedir. Hücre biyoması veya kültür sıvısından ekstrakte edilen ve saflaştırılan pigmentler ise gıda endüstrisi başta olmak çeşitli endüstrilerde renklendirici olarak kullanılmaktadır. Hatta, bu pigmentler çeşitli biyolojik aktiviteler (antioksidant, antibakteriyel, yaşlanma karşıtı, antikanser vb) sergiledikleri içinde kozmetik ve ilaç endüstrilerinde de önemli kullanım alanları bulmaktadır.

2. Doğal Pigmentler ve biyoteknolojik uygulamaları

Pigmentler ışığı emebilen ve belirli bir rengin görüntülenmesinden sorumlu olan bileşiklerdir. Bu pigmentler çeşitli cevherlerde, böceklerde, bitkilerde ve mikroorganizmalarda doğal olarak bulunmaktadır (Behera et al., 2021). Mikroorganizma olarakta bakterilerin, mantarların (filamentli mikrofunguslar, makrofunguslar ve mayalar), mikroalglerin ve protozoaların doğal pigmentleri ürettiği bilinmektedir (Tuli et al., 2015; Wang et al., 2017). Bu organizmalardan elde edilen doğal pigmentler gıda ve tekstil endüstrilerinde renklendirici olarak kullanılmaktadır. Dahası, doğal pigmentlerin çeşitli biyolojik aktivitelerde sergilediği ve bu yüzden insan sağlığı açısından da son derece faydalı oldukları belirtilmeketdir (Pasdaran et al., 2023; Singh et al., 2023).

Özellikle bitkiler ve mikroorganizmalar doğal pigmentlerin iki önemli kaynağıdır. Ancak bitkilerden elde edilen pigmentlerin ışığa, ısıya veya pH'a duyarlılık ve suda çözünürlüğünün düşük olması gibi çeşitli dezavantajları vardır. Mikrobiyal pigmentler ise kültür ortamında hızlı ve kolay bir şekilde üretilebilmekte ve bitki bazlı pigmentlerin aksine hava koşullarından etkilenmemektedirler. Bu nedenle doğal pigmentleri mikroorganizmalardan elde etmek daha avantajlı bir yaklaşım olarak kabul edilmektedir (Di Salvo et al., 2023).

3. Mikrobiyal Pigmentler

Mikroorganizmalar, pigmentler, enzimler, organik asitler, biyoyakıtlar, polisakkaritler, peptitler, antibiyotikler, tek hücre proteini, lipitler vb. gibi çeşitli metabolitlerin doğal kaynaklarıdır (Ranghar et al., 2019; Dabbagh et al., 2019).

Mikroorganizmalar tarafından sentezlenen önemli pigmentler karotenoidler, polyketide pigments (melanins, azaphilones, anthraquinones etc), fikobiliproteinler, heterosiklik pigmentler (violacein ve prodigiozin), fenazinler (piyosiyanin, piyoverdin, pyorubin), flavinler (riboflavin, roseoflavin and toxoflavin) ve klorofillerdir (Orlandi et al., 2022; Toma et al., 2023). Mikroorganizmalardan elde edilen bu pigmentlerin bazıları gıda endütrisinde renklendirici olarak kullanılmaktadır. Dahası, literatürde mikrobiyal pigmentlerin antiviral, antibakteriyel, antifungal, antioksidant, antikanser, antidiyabetik, antiaging, antiobezite ve yara iyileştirme gibi biyolojik aktivitler sergiledikleri ve bu yüzdende kozmetik, farmasotik ve nutrasötik endüstrilerinde de önemli kullanım alanları buldukları rapor edilmektedir (Lin and Xu, 2020; Celedón and Díaz, 2021; Jiang et al., 2023; Arslan et al., 2023; Esim et al., 2024).

Mikrobiyal pigmentler sıvı ve katı kültürlerde üretilmektedir. Üretim maliyetini azaltmak içinse, peynir altı suyu, melas, meyve kabukları, yün ve tüy gibi atık ya da yan ürünler üretim besiyerinde substrat (azot kaynağı ve/veya karbon kaynağı) olarak kullanılmaktadır. Üretim miktarını artırmak içinse substrat çeşidi ve konsantrasyonu, kültür pH’ sı, sıcaklık, inkübasyon süresi, oksijen konsantrasyonu, çalkalama hızı ve indükleyici ilavesi gibi parametreler optimize edilmektedir (Taskin et al., 2011; Lopes and Ligabue-Braun, 2021; Arslan 2021; Arslan et al., 2021; Kiziler et al., 2022).

Mikrobiyal pigmentler hücre içi (intrasellular) ve/veya hücre dışı (ekstrasellular) formda sentezlenmektedir. Hücre içi formda sentezlenenlerin aksine, ekstrasellular formda sentezlenenler kültür sıvısından daha kolay ekstrakte edilebilmekte ve daha yüksek miktarlarda üretimi gerçekleştirilebilmektedir. Mikrobiyal pigmentlerin ekstraksiyonunda ise kloroform, aseton, petrol eteri ve hekzan gibi organik çözücüler kullanılmaktadır (Taskin et al., 2011; Kanno et al., 2021; Poddar et al., 2021; Rather et al., 2023).

3.1. Karotenoidler

Karotenoidler sarı, turuncu, kırmızı ila mor renklerde bulunabilen ve bakteriler, ökaryotik mikroalgler, makroalgler, bitkiler, bazı arkeler ve mantarlar tarafından sentezlenen en yaygın pigmentlerdendir. Karotenoidler iki ana gruba ayrılır: ksantofiller (oksijen içeren) (C, H ve O) ve karotenler (oksijensiz) (C ve H). Doğada en yaygın karotenler α-karoten, β-karoten, γ-karoten, torulen ve likopendir; en çok bulunan ksantofiller ise β-kriptoksantin, lutein, zeaksantin, astaksantin, fukoksantin ve peridinindir (Barretto and Vootla, 2020; Maoka, 2020; Rapoport et al., 2021; Mapelli-Brahm et al., 2023).

Bakteriler tarafından sentezlenen başlıca karotenoidler β-karoten, astaksantin, likopen ve zeaksantindir; ancak bakteriler artroksantin, ζ-karoten, β-zeakaroten, C50-karotenoidler (bisanhidrobakterioruberin ve trisanhidrobakterioruberin) ve C42-karotenoid (3,4,3′,4′-Tetrahidrospirilloksantin) gibi diğer nadir karotenoidleri sentezlemektedirler (Jinendiran et al., 2020; Yu et al., 2022; Metwally et al., 2022; Jiang et al., 2023; Naik and Gupte 2023).

Fungusların bir grubu olan filamentöz mikrofungusların sentezlediği önemli karotenoid grubu pigmentler, β-karoten, torulen, likopen, astaksantin ve nörosporaksantindir. Diğer mantar grubu, yani mayalar, β-karoten, astaksantin, torulen ve torularhodin üretir. Mikroalgler tarafından sentezlenen karotenoidler arasında astaksantin, β-karoten, lutein, kantaksantin, zeaksantin, violaksantin, likopen, ekinenon, fukoksantin, adoniksantin ve peridinin bulunur (Arslan et al., 2023; Esim et al., 2024). Örneğin, *Phaffia rhodozyma* ve *Xanthophyllomyces dendrorhous* mayalarının yanı sıra ökaryotik mikroalg türleri olan *Chlorella zofingiensis* ve *Haematococcus pluvialis* astaksantinin en önemli ticari üreticileridir. Mikroalg *Dunaliella salina*' nın yanısıra *Rhodotorula glutinis, R. mucilaginosa* ve *Sporidiobolus pararoseus* mayaları ise en güçlü β-karoten üreticileridir (Arslan et al., 2023; Esim et al., 2024, Toma et al., 2023).

Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda bakterilerden, mantarlardan ve mikroalglerden elde edilen karotenoidlerin gerek *in vitro* gerekse *in vivo* çalışmalarda çeşitli biyolojik aktiviteler sergilediği rapor edilmiştir. Örneğin yapılan bir çalışmada (Jiang et al 2023), *Rhodococcus aetherivorans* N1 bakterisinden elde edilen *β*-carotene, zeaxanthin ve isorenieraten bakımından zengin karotenoid extraktının *in vitro*' da DPPH radikaline karşı antioksidant aktiviteye sahip olduğu gösterilmiştir. Fariq ve arkadaşları (2019) tarafından yapılan bir çalışmada, üç halofilik bakteriden (*Aquisalibacillus elongatus* MB592, *Salinicoccus sesuvii* MB597 ve *Halomonas aquamarina* MB598) saflaştırılan pigmentler yapısal olarak analiz edilmiş ve ardından potansiyel antioksidan aktiviteleri değerlendirilmiştir. Analitik tekniklere göre saflaştırılmış pigmentlerin bakterioruberin karotenoidlerin türevleri olduğu belirlenmiştir. *İn vitro* analizler ise, saflaştırılmış pigmentlerin antioksidan (DPPH radikal temizleyici), antifungal ve antibakteriyel aktiviteler gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Başka bir çalışmada (Yu et al., 2022), *Arthrobacter* sp. QL17 bakterisinden elde edilen arthroxanthin isimli karotenidin *in vitro*' da hem antioksidant (DPPH ve ABTS radikallerine karşı) hemde antikanser aktiviteye (HepG2, Hela, MDAB-231, SW480, and MKN-45 hücre hatlarına karşı) sahip olduğu rapor edilmiştir. Yine başka bir araştırma grubu (Metwally et al., 2022) bir aktinobakteri olan *Kocuria* sp. RAM1' den izole edilen C_{50}-karotenoidler (bisanhydrobacterioruberin ve trisanhydrobacterioruberin) ve C_{42}-carotenoid (3,4,3′,4′-Tetrahydrospirilloxanthin)'in antioksidant, antimikrobiyal, anti-inflammatory, anti-HSV-1, antikancer, antidiyabetik, and yara iyileştirme özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir. Farklı bir çalışma (Gurkok, 2022), *Metabacillus* *idriensis* LipT27 bakterisinden saflaştırılan turunclu renkli pigmentin karotenoid grubu bir pigmenti olduğunu ve bu pigmentin DPPH ve ABTS radikallerine karşı *in vitro* antioksidan potansiyele sahip olduğunu ve ayrıca Yersinia enterocolitica, Staphylococcus aureus ve Escherichia coli'ye karşı antibakteriyel etkinlik gösterdiğini ortaya çıkarmıştır.

Yapılan bir *in vivo* çalışmada (Wang ve diğerleri, 2022), *B. trispora*'dan ekstrakte edilen β-karoten'in üstün antioksidan, antiinflamatuar, immünomodülatör ve hepatoprotektif özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir. Gramza-Michałowska ve Stachowiak (2010), *P. rhodozyma* mayasından elde edilen astaksantin içeren karotenoid ekstraktının DPPH ve ABTS radikallerine karşı antioksidan potansiyele sahip olduğunu göstermiştir. Liu ve arkadaşları (2023), *Sporidiobolus pararoseus* ZQHL mayasından ekstrakte edilen torularhodin pigmentinin *in vitro* DPPH ve ABTS radikallerine karşı güçlü bir antioksidant potansiyeline sahip olduğunu ve aynı zamanda makrofaj hücre hattında (RAW 264.7 hücreleri) lipopolisakkarit (LPS) kaynaklı hücresel inflamasyonu hafiflettiğini belirlemiştir.

3.2. Polyketide pigmentler

Mikroorganizmalar tarafından sentezlenen poliketid pigmentlere melaninler, azafilonlar, antrakinonlar, hidroksiantrakinonlar, kinonlar ve naftokinonlar örnek verilebilir. Bu pigmentlerden melanin hem bakteriler hemde mantarlar tarafından sentezlenirken, azaphilones ve anthraquinones' ler sadece mantarlar tarafından sentezlendiği belirtilmektedir (Hayat et al., 2023; Mussagy et al., 2023; Dufossé, 2024).

Melanin hayvanlar, mantarlar ve bakteriler tarafından sentezlenen bir poliketid pigmentidir. Melanin beş ana kategoriye ayrılır: eumelanin, feomelanin, nöromelanin, allomelanin ve piyomelanin. Bu pigmentlerden eumelanin, pyomelanin ve allomelanin koyu kahverengi-siyah, feomelanin ise kırmızı-sarı bir renge sahiptir (Caldas et al., 2020). Maya olarak *Cryptococcus neoformans*, *Yarrowia lipolytica ve Aureobasidium pullulans'* un, makrofungus (mushroom) olarak *Auricularia auricula*, *Inonotus hispidus*, *Agaricus bisporus* ve *Lentinula edodes*' in mikrofungus olarak' da *Aspergillus, Phoma, Cladosporium ve Alternaria* türlerinin melanin ürettiği bildirilmektedir (Surendirakumar et al., 2022; Suthar et al., 2023; Arslan et al., 2023). Bakteriler dünyasında ise *Streptomyces*, *Providencia*, *Pseudomonas*, *Rhizobium*, *Bacillus ve Vibrio* cinslerinin melanin üretebileceği rapor edilmektedir (Kurian and Bhat 2017; Choi et al., 2021; Kordjazi et al., 2024).

Melaninler mantar ve bakterileri UV, güneş ve gama radyasyonu ve ağır metal toksisitesi gibi farklı çevresel stres faktörlerine karşı korur. Ayrıca melaninler mikroorganizmaların ekstrem koşullarda virülansını ve hayatta kalma potansiyelini arttırır (El-Naggar and Saber, 2022; Ghattavi et al., 2022; Muñoz-Torres et al., 2024).

Mikroorganizmalardaki rollerinin yanısıra, mikroorganizmalardan elde edilen melanin çeşitli biyolojik aktivitelerde (antikanser, antioksidant, yaşlanma karşıtı, antmikrobiyal vb) sergilemekte ve bu yüzden de kozmetik ve farmasötik endüstrilerinde önemli kullanım alanları bulmaktadır. Örneğin, Wu ve arkadaşları (2022), bir proteobakteri olan *Rhizobium radiobacter* ATCC 1333'ten elde edilen melaninin *in vitro* antioksidan (DPPH ve OH• radikal temizleme aktiviteleri) ve anti-mikrobiyal potansiyele (*E. coli, S. aureus, A. baumanii* ve *M. albicans*' a karşı) sahip olduğunu bildirmiştir. Mary ve arkadaşları (2022), bir proteobakteri olan *Pseudomonas mosselii* STSGRDS1'den elde edilen melaninin, DPPH, ABTS, OH•, H2O2 ve NO• radikallerine karşı *in vitro* antioksidan aktiviteye sahip olduğunu ve UV-A ve UV-B ışınlarına karşı koruma sağlayabileceğini göstermiştir. Bir başka çalışmada (Ghadge et al., 2020), *Bacillus subtilis* 4NP-BL'den elde edilen eumelaninin, DPPH radikallerine karşı antioksidan aktivite ve *Xanthomonas campestris ve Alteromonas macleodii*'ye karşı antimikrobiyal aktivite gösterdiğini tespit edilmiştir. Kurian ve Bhat SG (2017), bir deniz proteobakterisi olan *Providencia rettgeri* BTKKS1'den elde edilen eumelaninin, *in vitro*' da radikal temizleme ve metal şelatlama potansiyelinin yanı sıra fotokoruma ve anti-inflamatuar özelliklere sahip olduğunu belirlemiştir. El-Zawawy ve arkadaşları (2024) tarafından yapılan bir çalışmada *Streptomyces djakartensis* NSS-3'ten elde edilen pigment karakterize edilmiş ve biyolojik aktiviteleri değerlendirilmiştir. Çalışmanın ekibi bu bakteriden elde edilen pigmenti, ultraviyole görünür spektrofotometri (UV-VIS), Fourier dönüşümü kızılötesi (FT-IR), enerji dağılımlı X-ışını spektroskopisi (EDX) ve NMR analizinden elde edilen verilere göre azot-içermeyen piyomelanin olarak karakterize etmiştir. Araştırma ekibi bu melanin güçlü radikal temizleme aktivitesi ve radyokoruma potansiyeline sahip olduğunu, HCT116, HEPG ve MCF7 hücre hatlarına karşı antikanser, *P. aeruginosa* ATCC 902 (PA-09), *S. aureus* (SA-04), *K. pneumoniae* (KP-01) ve *E. coli* (EC-03) gibi çoklu ilaca dirençli (MDR) bakteri suşlarına karşı ise antibakteriyel etki gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Bir başka araştırma grubu (Surendirakumar et al., 2022), endofitik filamentöz bir mikrofungus olan *Phoma* sp. RDSE17' den edilen melaninin antioksidan (DPPH radikaline karşı), antimikrobiyal (patojenik bakteri ve mantarlara karşı) ve antikanser (insan akciğer kanseri hücre hattı A549'a karşı) aktivitelere sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Fu ve arkadaşları (2022), *Sporisorium reilianum* mikrofungusundan elde edilen L-25 melaninin kimyasal yapısını ve biyolojik aktivitelerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Ekip yapısal analizlere göre L-25' in DL-hidroksifenilalanin (DOPA) tipi bir melanin olduğunu belirlemiştir. Çalışmanın ekibi ayrıca bu melaninin DPPH radikallerine karşı güçlü bir antioksidant aktivite gösterdiğini, ROS ve malondialdehit seviyelerini ve laktat dehidrojenaz içeriğini azalttığını ve HepG2 hücrelerini oksidatif hasara karşı koruduğunu ortaya çıkardı. Barretto ve Vootla (2020), *Cryptococcus rajasthanensis* mayasından ekstrakte edilen melanininin *in vitro* antimikrobiyal, antioksidan, antiinflamatuar ve antikanser aktivitelere sahip olduğunu rapor etmiştir. Li ve arkadaşları (2022), *Inonotus hispidus* makrofungusundan elde edilen iki farklı melanin fraksiyonunun (suda çözünen ve suda çözünmeyen melanin) antioksidant özelliğini test etmiş ve suda çözünen melanin fraksiyonunun insan hepatik LO2 hücrelerini H_2O_2 kaynaklı oksidatif strese karşı koruduğunu ve bu hücrelerde hücre içi ROS'u önemli ölçüde azalttığını belirlenmiştir. Yakın zamanda yapılan başka bir çalışmada (Tong et al., 2023), *Ophiocordyceps sinensis* makrofungusundan elde edilen melaninin, *in vitro*'da DPPH and ABTS radikallerini giderme, metal şelatlama and hücre içi ROS içeriğini azaltma gibi biyolojik aktiviteler sergilediği gösterilmiştir.

Fungal polyketides- azafilonlar ve antrakinonlar ise filamentli mikrofunguslar tarafından sentezlenmektedir. Örneğin, *Monascus* cinsinin özelliklede *M. purpureus*' un sari (monascin ve ankaflavin), kırmızı (monascorubramine ve rubropuntamine) ve turuncu (monascorubrin and rubropunctatin) renklerde, *Penicillium cinsinin ise (örneğin P. cimallochii* ve *P. sclerotiorum) ise* sclerotiorin isimli sari renkli azaphilone pigment ürettiği bilinmektedir. Polyketides-anthraquinones ise filamentli mikrofungusların *Aspergillus, Alternaria, Talaromyces, Eurotium, Fusarium, Phoma, Trichoderma gibi cinsler tarafından sentezlenmektedir.* Örneğin, *Aspergillus versicolor* aspergilol A ve aspergilol B, *Talaromyces purpureogenus* ise anthraquinone and herquinone isimli anthraquinone tip pigmentleri sentezlemektedir (Huang et al., 2017; Hasanien et al., 2022; Arslan et al., 2023; Toma et al., 2023). Literatürde ise azafilonların ve antrakinonların antioksidant, antikanser, antibakteriyel, antiparazitik, antiviral, herbisidal, insektisit, kolesterol düşürücü ve fungisidal aktiviteler sergilediği açıklanmaktadır (Arslan et al., 2023; Toma et al., 2023; Vidal et. al., 2023). Örneğin Chaudhary ve arkadaşları (2022), *M. purpureus*'tan (MTCC 369) ekstrakte edilen kırmızı renkli pigmentin, DPPH ve ABTS radikal temizleme ve ferrik indirgeme gücü analizlerinde güçlü antioksidan aktiviteye sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bu pigmentlerin, insan prostat kanseri hücre hattı (LNCaP) üzerinde antikanser aktivite gösterdiğinide belirlemişlerdir. Farklı bir araştırma grubu (Hasanien et al., 2022), *Talaromyces purpureogenus*'tan elde edilen kırmızı pigment ekstraktının (antrakinon ve herkinon içeren), DPPH radikali giderme testine göre antioksidan aktiviteye sahip oldugunu bulmuştur. Aynı araştırmacılar bu ekstraktın karaciğer hücre hattı (HepG-2), meme kanseri hücre hattı (MCF-7) ve bir kolon kanseri hücre hatttı (HCT116) üzerinde antikanser aktivite sergilediğini belirlemiştir. Vidal ve arkadaşları (2023), deniz mantarı *Chromolaenicola* sp.'nin kültür sıvısından saflaştırılan bir antrakinon olan 1,8-dihidroksi-9,10-antrakinonun (danthron), anti-anjiyojenik, antikanser, antimetastatik ve antioksidan özelliklere sahip olduğunu belirlemiştir. Elawady ve arkadaşları (2022), endofitik mantar *Aspergillus versicolor* SB5'ten elde edilen physcion (doğal olarak oluşan, sarı-turuncu renkli bir antrakinon türevi pigment) adı verilen bir dihidroksiantrakinon bileşiğinin bazı biyolojik aktivitelerini araştırmış ve bu bileşiğin anti-inflamatuar potansiyele sahip olduğunu, DPPH, ABTS, O_2• ve nitrik oksit (NO•) radikallerini temizleyebildiğini, lipit peroksidasyonunu inhibe edebildiğini ve güçlü antikolinesteraz aktivitesi gösterdiğini ortaya çıkarmıştır. Zhou ve arkadaşları (2023), filamentli bir mikrofungus olan *Aspergillus ustus*'tan elde edilen bir poliketon pigment-DBFL05'in antioksidan ve antibakteriyel etkinliğini araştırmış ve bu pigmentin suda yüksek çözünürlüğe, alkolde düşük çözünürlüğe sahip olduğunu ancak diğer organik çözücülerde ise çözünmediği belirlemiştir. Bu araştırmacılar ayrıca pigmentin piropirazin diketon ve diantron dıiye iki ana bileşenden meydana geldiğini ve her iki bileşeninde de üç patojenik bakteriye (*Escherichia coli, Staphylococcus aureus* ve *Bacillus subtilis*) karşı antibakteriyel ve OH• ve DPPH radikallerine karşıda antioksidant aktivite gösterdiğini ortaya çıkarmıştır.

3.3. Heterosiklik pigmentler

Heterosiklik bileşikler, iki veya daha fazla farklı türde atom içeren siklik bir yapıya sahiptir. Bakterilerden elde edilen heterosiklik pigmentlerin en bilinenleri indigo ve indigoidin (mavi), prodigiosin (kırmızı) ve viyolasin (mor renkli) dir (Orlandi et al., 2022).

Prodigiosin' in ana üreticisi *Serratia marcescens* bakterisi olsa da, *Pseudomonas magneslorubra, Vibrio psychroerythrous, Alteromonas rubra* ve bazı *Streptomyces* türlerininde bu pigmenti ürettiği bilinmektedir (Gacem et al., 2020; Darshan and Manonmani, 2015; Mukhia et al., 2023).

Bakteri kaynaklı prodigiozin özellikle antibakteriyel özelliği ile ön plana çıkmaktadır. Bununla birlikte, pigmentin antioksidan, antifungal, antimalaryal, antikanser, antidiyabetik ve immünsüpresif gibi çeşitli biyolojik aktivitelerede sahip olduğu bildirilmektedir (Arivizhivendhan et al., 2018; Mukhia et al., 2023). Bu pigmentin antibakteriyel etki mekanizması, hücre mebranına zarar verme ve membranı geçerek hücre büyümesini inhibe eden DNA giraz ve topoizomeraz IV gibi enzimleri inhibe etme yeteneği, antikanser potansiyeli ise onların kanser hücreleri üzerindeki apoptotic yeteneği (hücre döngüsünün durdurulması, DNA hasarı ve hücre içi pH değişikliği sayesinde) ile açıklanmaktadır (Berlanga et al., 2000; Darshan and Manonmani, 2015; Suryawanshi et al., 2017). Örneğin yapılan bir çalışmada (Sajjad et al., 2018), *Streptomyces* sp. WMA-LM31 suşundan elde edilen prodigiozin güçlü antioksidan, antikanser ve apoptotik özelliklere sahip olduğu gösterilmiştir. Sudhakar ve arkadaşları (2022), *S. marcescens*' den saflaştırdıkları prodigiozinin, DPPH ve ABTS radikallerine karşı güçlü bir antioksidan aktivitenin yanısıra antimikrobiyal ve antikanser kapasiteye de sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Yine farklı bir çalışmada (Koyun ve ark., 2022), *S.*

marcescens MB703'ten saflaştırılan prodigiozinin, HT-29 insan kolon kanseri ve SK-MEL-30 insan melanom hücrelerine karşı antikanser aktiviteye sahip olduğu rapor edilmiştir. Ayrıca aynı çalışmada prodigiozinin, antioksidan enzim aktivitelerini (SOD ve CAT) artırarak ve MDA düzeyini azaltarak SH-SY5Y insan nöroblastoma hücrelerini oksidatif strese karşı koruduğu da tespit edilmiştir.

Bakteriler tarafından sentezlenen ve heterosiklik yapıya sahip olan diğer pigment ise viyolasindir. Mor renkli olan bu pigment *Chromobacterium violaceum*' un yanısıra *C. vaccinii, Janthinobacterium lividum, Duganella* sp., *Pseudoalteromonas* sp., *Iodobacter* sp., and *Massilia* sp. türü bakteriler tarafından üretilmektedir. Bu pigmentinde antimikrobiyal, antikanser ve antioksidant aktiviteyede sahip olduğu rapor edilmektedir (Masuelli et al., 2016; Vishnu and Palaniswamy, 2018; Park et al., 2021; Cheng et al., 2022). Örneğin Cheng ve arkadaşları (2022), *Chromobacterium* violaceum'dan izole edilen violaceinin DPPH ve ABTS radikallerine karşı antioksidant, gram-pozitif patojenlere (*Staphylococcus aureus* ve *Bacillus subtilis)* karşı ise güçlü antibakteriyel etkinliğe sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Anahas ve arkadaşları (2022), bir halofilik bakteri olan *C. violaceum*'dan izole edilen violaceinin'in *S. aureus, B. subtilis, E. coli, P. aeruginosa* ve *C. albicans*'a karşı antimikrobiyal etkinliğe sahip olduğunu ve ayrıca antioksidan aktivite sergilediğini ortaya çıkarmıştır.

3.4. Fenazinler

Fenazinler azot içeren heterosiklik bileşiklerledir. Bakteriler tarafından üretilen fenazinlerden olan piyosiyanin mavi-yeşil, pyoverdin sarı-yeşil, pyomelanin açık kahverengi, pyorubrin ise kırmızı-kahverengi tonlarındadır (Saleem et al., 2021). En çok çalışılan fenazin ise piyosiyanindir. Piyosiyanin, oksidasyon durumuna göre renk değiştiren, suda çözünür ve floresan olmayan bir fenazindir: tamamen oksitlenmiş durumda mavidir ve indirgenmiş durumda ise renksizdir. Piyosiyanin çok güçlü antimikrobiyal özelliğe sahip olduğu ve bu yüzden piyosiyanin üreten bakterilerin doğal ortamda diğer mikroplara karşı daha avantajlı olduğu belirtilmektedir. Piyoverdin, demir alımında, pyorubin ise mikroorganizmanın oksidatif strese karşı korunmasına görev alır (Mavrodi et al., 2001; Visca et al., 2007; Ruiz-Roldán et al., 2020).

Pseudomonadlar en çok araştırılan fenazin üreticileridir. Bunla birlikte *Sorangium, Brevibacterium, Burkholderia, Erwinia, Pantoea aglomerans* ve *Streptomyces* gibi diğer Gram negatif ve Gram pozitif bakterilerinde fenazinleri ürettiği bilinmektedir (Orlandi et al., 2022). Yapılan çalışmalarda, bakterilerdeki rollerinin yanısıra, onlardan elde edilen fenazinlerin çeşitli biyolokik aktiviteler sergilediği ve bu yüzden tıbbi öneme sahip olduğu açıklanmaktadır. Örneğin, yapılan bir çalışmada (Saleem et al., 2021), *Pseudomonas aeruginosa*'dan elde edilen piyosiyanin, DPPH ve ABTS radikallerine karşı antioksidan ve gıda kaynaklı patojenlere (bakteri ve mantarlara) karşı ise antimikrobiyal etkinliğe sahip olduğu belirlenmiştir. Marey ve arkadaşları (2024), *P. aeruginosa*'dan saflaştırdıkları piyosiyaninin farklı klinik bakteri suşlarına (*Bacillus, Staphylococcus, Streptococcus* ve *E. coli* izolatları) karşı antibakteriyel aktiviteye sahip olduğunu ve ayrıca A549, MDA-MB-231, Caco-2 ve MDA-MB-231 kanser hücre hatlarına karşı antikanser aktivite gösterdiğini tespit etmiştir. Farklı bir çalışmada (Shouman ve diğerleri, 2023), *Pseudomonas aeruginosa*'nın klinik (PsC05) ve çevresel (PsE02) suşlarından ekstrakte edilen iki farklı piyosiyaninin potansiyel biyoaktiviteleri araştırılmıştır. Araştırma ekibinin elde ettiği sonuçlara göre saflaştırılmış piyosiyaninlerin, test edilen tüm gıda kaynaklı patojenlere, MDR/XDR bakterilere ve *C. albicans*'a karşı dikkate değer antimikrobiyal potansiyele sahip olduğu tespit edilmiştir. Araştırma ekibi ayrıca, söz konusu piyosiyaninlerin bakteriyel patojenlerin biyofilm yeteneklerinide önemli ölçüde azaltığı ancak *C. albicans*'a karşı sınırlı antibiyofilm aktivitesi gösterdiğini tespit etmiştir. Diğer yandan ekibin elde ettiği sonuçlar, PsC05 kaynaklı piyosiyaninin PsE02 piyosiyanine oranla, daha yüksek antioksidant (FRAP, DPPH ve ABTS analizlerine göre) ve antikanser aktiviteye (insan Meme Kanseri MCF-7 ve Kolorektal Karsinomaya HCT-116’ ye karşı) sahip olduğunuda ortaya çıkarmıştır.

3.5. Fikobiliproteinler

Fikobiliproteinler (PBP'ler), siyanobakterilerde ve bazı ökaryotik alglerde (*Rhodophyta* filumu) ışık absorbsiyonunda görev yapan suda çözünür proteinlerdir. Işık emme özelliklerine göre PBP'ler dört gruba ayrılır: fikoeritrinler (PE; pembe-mor), fikoeritrosiyaninler (PEC'ler; turuncu), fikosiyaninler (PC; mavi) ve allofikosiyaninler (APC). Bu organizmalardan elde edilen, PBP'ler gıda, kozmetik ve boya endüstrilerinde pigment olarak kullanılır (Esim et al., 2024).

Diğer taraftan, bu organizmalardan elde edilen PBP’ ler antioksidan, anti-inflamatuar, anti-aging, antiviral, antibakteriyel, antikanser, hepatoprotektif ve nöroprotektif aktiviteleri nedeniyle PBP'ler kozmetik, ilaç ve nutrasötik endüstrilerinde önemli kullanım alanlarına sahiptirler (Esim et al., 2024). Örneğin, Viana Carlos ve arkadaşları (2021) bir siyanobakteri olan *Arthrospira platensis*'ten elde ettikleri PBP ekstraktının kimyasal içeriğini ve biyolojik aktivitelerini araştırmıştır. Bu araştırmacılar ekstraktın fikosiyanin ve allofikosiyanin içerdiğini ve ekstraktın DPPH radikal temizleme ve demir şelatlama testelerine göre yüksek antioksidan potansiyele sahip olduğunu ortaya çıkarmıştır. Lin ve Ng (2021), *Cyanobacterium aponinum* PCC 10605'ten ekstrakte edilen C-fikosiyaninin DPPH ve O_2• radikallerine karşı antioksidant, E. coli'ye karşı antibakteriyel aktiviteye, HL60 lösemik hücrelere karşı ise antikanser aktiviteye sahip olduğunu belirlemiştir. Yapılan başka bir çalışmada *Michrochaete*'den izole edilen Fikoeritrinin antikanser (HepG2 hücre hattına karşı), antibakteriyel (*Pseudomonas aeruginosa, E. coli* ve *Staphylococcus aureus*' a karşı) ve antioksidant (ABTS ve DPPH radikallerine karşı) aktivitelere sahip olduğu rapor edilmiştir. Yapılan başka bir çalışmada (Afreen and Fatma, T2018), *Michrochaete*'den izole edilen fikoeritrinin antikanser (HepG2 hücre hattına karşı), antibakteriyel (*Pseudomonas aeruginosa, E. coli* ve *Staphylococcus aureus*' a karşı) ve antioksidant (ABTS ve DPPH radikallerine karşı) aktivitelere sahip olduğu rapor edilmiştir. Patel ve arkadaşları (2018) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada bir deniz siyanobakterisi olan *Halomicronema* sp.'den saflaştırılan fikoeritrinin antioksidant aktivitesi sayesinde model organizma olan *Caenorhabditis elegans*'ta hücre içi ROS'taki artışı azalttığı, bozulmuş fizyolojik davranışları düzelttiği ve yaşlanmaya karşı koruyucu özellik taşıdığı gösterilmiştir. Başka bir araştırma ekibi (Suphan et al., 2023) tarafından yapılan çalışmada, bir siyanobakteri olan *Nostoc sp* SW02 türünden hazırlanan PBP ekstraktının kimyasal içeriği ve biyolojik aktiviteleri test edilmiştir. Çalışmada, ekstraktın fikoeritrin ve fikosiyanin içerdiği ve antioksidan (DPPH radikaline karşı) ve antikanser (insan HeLa kanser hücre dizisine karşı) aktiviteler sergilediği bulunmuşmuştur. Ayrıca ekstraktın iki gram-pozitif bakteriye (*Bacillus subtilis* TISTR 1528 ve *Staphylococcus aureus* ATCC 25923) karşı antimikrobiyal etkinlik gösterdiği ancak gram pozitif bakteri *Propionibacterium acnes* DMFT 14916, gram negatif bakteri *E. coli* ATCC 25922 ve maya *C. albicans* SU 28'e karşı antimikrobiyal potansiyele sahip olmadığı belirlenmiştir.

4. SONUÇ

Doğal pigmentler mayalar, bakteriler, ipliksi mikrofunguslar ve mikroalgler gibi mikroorganizma grupları tarafından üretilebilmektedir. Bu mikroorganizmalar tarafından üretilen en önemli pigment grupları ise karotenoidler (β-karoten, torularhodin, astaksantin, likopen, fukoksantin zeaksantin, lutein, artroksantin, ζ-karoten, β-zeakaroten vb), polyketide pigments (melaninler, azafilonlar, antrakinonlar, hidroksiantrakinonlar, kinonlar ve naftokinonlar), fenazinler (piyosiyanin, pyoverdin ve pyomelanin), fikobiliproteinler (fikoeritrinler, fikoeritrosiyaninler, fikosiyaninler ve allofikosiyaninler) dir. Bu pigmentler ise gıda, kozmetik ve boya endüstrilerinde renklendirici olarak kullanılmalarının yanısıra, sahip oldukları çeşitli biyoaktif özelliklerinden (antioksidant, antimikrobiyal, yaşlanma karşıtı vb) dolayı kozmetik ve ilaç endüstrilerinde uygulama alanları bulmaktadır.

KAYNAKLAR

Afreen, S., & Fatma, T. (2018). Extraction, purification and characterization of phycoerythrin from Michrochaete and its biological activities. *Biocatalysis and agricultural biotechnology*, *13*, 84-89.

Anahas, A. M. P., Kumaran, S., Kandeel, M., Muralitharan, G., Silviya, J., Adhimoolam, G. L., ... & Prasannabalaji, N. (2022). Applications of natural violet pigments from Halophilic *Chromobacterium violaceum* PDF23 for textile dyeing with antimicrobial and antioxidant potentials. *Journal of Nanomaterials*, *2022*(1), 3885396.

Arivizhivendhan, K. V., Mahesh, M., Boopathy, R., Swarnalatha, S., Regina Mary, R., & Sekaran, G. (2018). Antioxidant and antimicrobial activity of bioactive prodigiosin produces from *Serratia marcescens* using agricultural waste as a substrate. *Journal of Food science and Technology*, 55, 2661-2670.

Arslan, N. P. (2021). Use of wool protein hydrolysate as nitrogen source in production of microbial pigments. *Journal of Food Processing and Preservation*, *45*(7), e15660.

Arslan, N. P., Yazici, A., Komesli, S., Esim, N., & Ortucu, S. (2021). Direct conversion of waste loquat kernels to pigments using *Monascus purpureus* ATCC16365 with proteolytic and amylolytic activity. *Biomass Conversion and Biorefinery*, *11*, 2191-2199.

Barretto, D. A., and S. K. Vootla. 2020. Biological activities of melanin pigment extracted from Bombyx mori gut-associated yeast *Cryptococcus rajasthanensis* KY627764. *World Journal of Microbiology and Biotechnology*, 36(10):159.

Behera, H. T., Mojumdar, A., Nivedita, S., & Ray, L. (2021). Microbial pigments: Secondary metabolites with multifaceted roles. In *Microbial Polymers: Applications and Ecological Perspectives* (pp. 631-654). Singapore: Springer Singapore.

Berlanga, M., Ruiz, N., Hernandez-Borrell, J., Montero, T., & Viñas, M. (2000). Role of the outer membrane in the accumulation of quinolones by *Serratia marcescens*. *Canadian journal of microbiology*, *46*(8), 716-722.

Celedón, R. S., & Díaz, L. B. (2021). Natural pigments of bacterial origin and their possible biomedical applications. *Microorganisms*, *9*(4), 739.

Chaudhary, V., P. Katyal, H. Panwar, J. Kaur, R. E. Aluko, A. K. Puniya, and A. K. Poonia. 2022. Antioxidative, anti-inflammatory, and anticancer properties of the red biopigment extract from *Monascus purpureus* (MTCC 369). *Journal of Food Biochemistry*, 46(9):e14249.

Cheng, K. C., Hsiao, H. C., Hou, Y. C., Hsieh, C. W., Hsu, H. Y., Chen, H. Y., & Lin, S. P. (2022). Improvement in violacein production by utilizing formic acid to induce quorum sensing in *Chromobacterium violaceum*. *Antioxidants*, 11(5), 849.

Dabbagh, F., Moradpour, Z., & Ghasemian, A. (2019). Microbial products and biotechnological applications thereof: Proteins, enzymes, secondary metabolites, and valuable chemicals. *Microbial Interventions in Agriculture and Environment: Volume 3: Soil and Crop Health Management*, 385-432.

Darshan, N., & Manonmani, H. K. (2015). Prodigiosin and its potential applications. *Journal of food science and technology*, *52*, 5393-5407.

Di Salvo E, Lo Vecchio G, De Pasquale R, De Maria L, Tardugno R, Vadalà R, Cicero N. Natural pigments production and their application in food, health and other industries. *Nutrients*. 2023; 15(8):1923. https://doi.org/10.3390/nu15081923

Dufossé, L. (2024). Current and potential natural pigments from microorganisms (bacteria, yeasts, fungi, and microalgae). In *Handbook on natural pigments in food and beverages* (pp. 419-436). Woodhead Publishing.

El-Naggar, N. E. A., & Saber, W. I. (2022). Natural melanin: current trends, and future approaches, with especial reference to microbial source. *Polymers*, *14*(7), 1339.

El-Zawawy, N. A., Kenawy, E. R., Ahmed, S., & El-Sapagh, S. (2024). Bioproduction and optimization of newly characterized melanin pigment from *Streptomyces djakartensis* NSS-3 with its anticancer, antimicrobial, and radioprotective properties. *Microbial Cell Factories*, *23*(1), 23.

Elawady, M. E., A. A. Hamed, W. M. Alsallami, E. Z. Gabr, M. O. Abdel-Monem, and M. G. Hassan. 2023. Bioactive metabolite from endophytic *Aspergillus versicolor* SB5 with anti-acetylcholinesterase, anti-İnflammatory and antioxidant activities: *In vitro* and *in silico* studies. *Microorganisms*, 11(4):1062.

Fariq, A., Yasmin, A., & Jamil, M. (2019). Production, characterization and antimicrobial activities of bio-pigments by *Aquisalibacillus elongatus* MB592, *Salinicoccus sesuvii* MB597, and *Halomonas aquamarina* MB598 isolated from Khewra Salt Range, Pakistan. *Extremophiles*, 23, 435-449.

Fu, X., M. Xie, M. Lu, L. Shi, T. Shi, and M. Yu. 2022. Characterization of the physicochemical properties, antioxidant activity, and antiproliferative activity of natural melanin from *S. reiliana*. *Scientific Reports*, 12(1):2110.

Gacem, M. A., Ould-El-Hadj-Khelil, A., Boudjemaa, B., & Wink, J. (2020). Antimicrobial and antioxidant effects of a forest actinobacterium V 002 as new producer of spectinabilin, undecylprodigiosin and metacycloprodigiosin. *Current Microbiology*, 77, 2575-2583.

Ghadge, V., Kumar, P., Singh, S., Mathew, D. E., Bhattacharya, S., Nimse, S. B., & Shinde, P. B. (2020). Natural melanin produced by the endophytic Bacillus subtilis 4NP-BL associated with the halophyte *Salicornia brachiata*. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, 68(25), 6854-6863.

Gramza-Michałowska, A., and B. Stachowiak. 2010. The antioxidant potential of carotenoid extract from *Phaffia rhodozyma*. *Acta Scientiarum Polonorum Technologia Alimentaria*, 9(2):171-188.

Gurkok, S. (2022). A novel carotenoid from *Metabacillus idriensis* LipT27: production, extraction, partial characterization, biological activities and use in textile dyeing. *Archives of Microbiology*, 204(6), 296.

Hasanien, Y. A., A. A Nassrallah, A. G. Zaki, and G. Abdelaziz. 2022. Optimization, purification, and structure elucidation of anthraquinone pigment derivative from *Talaromyces purpureogenus* as a novel promising antioxidant, anticancer, and kidney radio-imaging agent. *Journal of Biotechnology*, 356:30-41.

Kanno, K. Y. F., Karp, S. G., Rodrigues, C., de Andrade Tanobe, V. O., Soccol, C. R., & da Costa Cardoso, L. A. (2021). Influence of organic solvents in the extraction and purification of torularhodin from *Sporobolomyces ruberrimus*. *Biotechnology Letters*, *43*, 89-98.

Kiziler, M. E., Orak, T., Doymus, M., Arslan, N. P., Adiguzel, A., & Taskin, M. (2022). Farnesol and tyrosol: novel inducers for microbial production of carotenoids and prodigiosin. *Archives of Microbiology*, *204*, 1-8.

Kurian, N. K., & Bhat, S. G. (2017). Photoprotection and anti-inflammatory properties of non–cytotoxic melanin from marine isolate *Providencia rettgeri* strain BTKKS1. *Biosciences Biotechnology Research Asia*, 14(4), 1475-1484.

Li, X., W. Wu, F. Zhang, X. Hu, Y. Yuan, X. Wu, and J. Fu. 2022. Differences between water-soluble and water-insoluble melanin derived from *Inonotus hispidus* mushroom. *Food Chemistry*: X(16):100498.

Lin, L., & Xu, J. (2020). Fungal pigments and their roles associated with human health. *Journal of Fungi*, *6*(4), 280.

Liu, C., M. Han, F. Lv, Y. Gao, X. Wang, X. Zhang, Y. Guo, Y. Cheng, H. Qian. 2023. Study on the cellular anti-Inflammatory effect of torularhodin produced by *Sporidiobolus pararoseus* ZQHL isolated from vinegar fungus. *Molecules*, 28(3):1436.

Lopes, F. C., & Ligabue-Braun, R. (2021). Agro-industrial residues: Eco-friendly and inexpensive substrates for microbial pigments production. *Frontiers in Sustainable Food Systems*, *5*, 589414.

Mary, T., Srimathi, S. D., Krishna, A. R., Jayaprabha, C., & Ramasamy, S. (2020). Antioxidant activity and sun screening effects of bacterial melanin. *Journal of Bioscience and Biotechnology*, 9(1), 47-58.

Masuelli, L., Pantanella, F., La Regina, G., Benvenuto, M., Fantini, M., Mattera, R., ... & Bei, R. (2016). Violacein, an indole-derived purple-colored natural pigment produced by *Janthinobacterium lividum*, inhibits the growth of head and neck carcinoma cell lines both *in vitro* and *in vivo*. *Tumor Biology*, 37, 3705-3717.

Mavrodi, D.V., Bonsall, R.F., Delaney, S.M., Soule, M.J., Phillips, G. and Thomashow, L.S., 2001. Functional analysis of genes for biosynthesis of pyocyanin and phenazine-1-carboxamide from *Pseudomonas aeruginosa* PAO1. *Journal of bacteriology*, *183*(21), pp.6454-6465.

Mukhia, S., Kumar, A., & Kumar, R. (2023). Antioxidant prodigiosin-producing cold-adapted *Janthinobacterium* sp. ERMR3: 09 from a glacier moraine: Genomic elucidation of cold adaptation and pigment biosynthesis. *Gene*, 857, 147178.

Muñoz-Torres, P., Cárdenas-Ninasivincha, S., & Aguilar, Y. (2024). Exploring the Agricultural Applications of Microbial Melanin. *Microorganisms*, *12*(7), 1352.

Mussagy, C. U., de Oliveira, F., & Santos-Ebinuma, V. C. (2023). Natural Colorants from Fungi. *Handbook of Natural Colorants*, 391-415.

Orlandi, V. T., Martegani, E., Giaroni, C., Baj, A., & Bolognese, F. (2022). Bacterial pigments: A colorful palette reservoir for biotechnological applications. *Biotechnology and Applied Biochemistry*, *69*(3), 981-1001.

Park, H., Park, S., Yang, Y. H., & Choi, K. Y. (2021). Microbial synthesis of violacein pigment and its potential applications. *Critical Reviews in Biotechnology*, 41(6), 879-901.

Pasdaran, A., Zare, M., Hamedi, A., & Hamedi, A. (2023). A review of the chemistry and biological activities of natural colorants, dyes, and pigments: challenges, and opportunities for food, cosmetics, and pharmaceutical application. *Chemistry & Biodiversity*, *20*(8), e202300561.

Patel, S. N., Sonani, R. R., Jakharia, K., Bhastana, B., Patel, H. M., Chaubey, M. G., ... & Madamwar, D. (2018). Antioxidant activity and associated structural attributes of *Halomicronema* phycoerythrin. *International Journal of Biological Macromolecules*, *111*, 359-369.

Poddar, K., Padhan, B., Sarkar, D., & Sarkar, A. (2021). Purification and optimization of pink pigment produced by newly isolated bacterial strain *Enterobacter* sp. PWN1. *SN Applied Sciences*, *3*, 1-11.

Ranghar, S., Agrawal, S., & Agrawal, P. K. (2019). Microbial products: Protein, enzyme, secondary metabolites and chemicals. *Microbial Interventions in Agriculture and Environment: Volume 3: Soil and Crop Health Management*, 347-384.

Rather, L. J., Mir, S. S., Ganie, S. A., & Li, Q. (2023). Research progress, challenges, and perspectives in microbial pigment production for industrial applications-A review. *Dyes and Pigments*, *210*, 110989.

Ruiz-Roldán, L., Rojo-Bezares, B., de Toro, M., López, M., Toledano, P., Lozano, C., Chichón, G., Alvarez-Erviti, L., Torres, C. and Sáenz, Y., 2020. Antimicrobial resistance and virulence of *Pseudomonas* spp. among healthy animals: concern about exolysin ExlA detection. *Scientific reports*, *10*(1), p.11667.

Saleem, H., Mazhar, S., Syed, Q., Javed, M. Q., & Adnan, A. (2021). Bio-characterization of food grade pyocyanin bio-pigment extracted from chromogenic *Pseudomonas* species found in Pakistani native flora. *Arabian Journal of Chemistry*, 14(3), 103005.

Shouman, H., Said, H. S., Kenawy, H. I., & Hassan, R. (2023). Molecular and biological characterization of pyocyanin from clinical and environmental Pseudomonas aeruginosa. *Microbial Cell Factories*, *22*(1), 166.

Singh, T., Pandey, V. K., Dash, K. K., Zanwar, S., & Singh, R. (2023). Natural bio-colorant and pigments: Sources and applications in food processing. *Journal of Agriculture and Food Research*, *12*, 100628.

Suphan, S., Limrujiwat, K., Kula, K., Maneeruttanarungroj, C., Raksajit, W., & Khetkorn, W. (2023). Characterization and exploration of biological properties of phycobiliproteins purified from Thai karstic cave cyanobacterium *Nostoc* sp. SW02. *Biocatalysis and Agricultural Biotechnology*, *52*, 102826.

Surendirakumar, K., Pandey, R. R., Muthukumar, T., Sathiyaseelan, A., Loushambam, S., & Seth, A. (2022). Characterization and biological activities of melanin pigment from root endophytic fungus, *Phoma* sp. RDSE17. *Archives of Microbiology*, *204*(3), 171.

Suryawanshi, R. K., Patil, C. D., Koli, S. H., Hallsworth, J. E., & Patil, S. V. (2017). Antimicrobial activity of prodigiosin is attributable to plasma-membrane damage. *Natural product research*, *31*(5), 572-577.

Suthar, M., Dufossé, L., & Singh, S. K. (2023). The enigmatic world of fungal melanin: a comprehensive review. *Journal of Fungi*, *9*(9), 891.

Taskin, M., Sisman, T., Erdal, S., & Kurbanoglu, E. B. (2011). Use of waste chicken feathers as peptone for production of carotenoids in submerged culture of Rhodotorula glutinis MT-5. *European Food Research and Technology*, *233*, 657-665.

Toma, M.A., M. H. Rahman, M. S. Rahman, M. Arif, K. N. H Nazir, and L. Dufossé. 2023. Fungal pigments: carotenoids, riboflavin, and polyketides with diverse applications. *Journal of Fungi*, 9(4): 454.

Tong, C., J. Luo, C. Xie, J. Wei, G. Pan, Z. Zhou, and C. Li. 2023. Characterization and Biological activities of melanin from the medicinal fungi *Ophiocordyceps sinensis*. *International Journal of Molecular Sciences*, 24(12):10282.

Tuli, H.S., Chaudhary, P., Beniwal, V. *et al*. Microbial pigments as natural color sources: current trends and future perspectives. *J Food Sci Technol* **52**, 4669–4678 (2015). https://doi.org/10.1007/s13197-014-1601-6

Vidal, I., J. A. Torres-Vargas, J. M. Sánchez, M. Trigal, M. García-Caballero, M. Á. Medina, and A. R. Quesada. 2023. Danthron, an anthraquinone ısolated from a marine fungus, is a new ınhibitor of angiogenesis exhibiting interesting antitumor and antioxidant properties. *Antioxidants*, 12(5): 1101.

Visca, P., Imperi, F. and Lamont, I.L., 2007. Pyoverdine siderophores: from biogenesis to biosignificance. *Trends in microbiology*, *15*(1), pp.22-30.

Vishnu, T. S., & Palaniswamy, M. (2018). Systematic approach on evaluating the *in vitro* antioxidant activity of violacein; novel isolate *Chromobacterium vaccinii* CV5. *Biomedical and Pharmacology Journal*, 11(2), 703-709.

Wang, S., Xu, F., & Zhan, J. (2017). Introduction of natural pigments from microorganisms. *Bio-pigmentation and Biotechnological Implementations*, 1-22.

Wang, Y., J. Lu, H. Qu, C. Cai, H. Liu, and Chu. J. 2022. β-Carotene extracted from Blakeslea trispora attenuates oxidative stress, inflammatory, hepatic injury and immune damage induced by copper sulfate in zebrafish (*Danio rerio*). Comparative Biochemistry and Physiology Part C: *Toxicology & Pharmacology*, 258:109366.

Wu, C. C., Li, H., Yin, Z. W., Zhang, H. T., Gao, M. J., Zhu, L., & Zhan, X. B. (2022). Isolation, purification, and characterization of novel melanin from the submerged fermentation of *Rhizobium radiobacter*. *Process Biochemistry*, 121, 263-275.

Zhou, M., Y. Chen, X, Fang, L. Wu, and Y. Zhang. 2023. Isolation and identification of pigment-producing filamentous fungus DBFL05 and its pigment characteristics and chemical structure. *CyTA-Journal of Food*, 21(1):374-385